Условия Гаусса-Маркова
Теорема Гаусса-Маркова
Свойства МНК-оценок

Лекция 8

СВОЙСТВА ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ

Для того чтобы полученные по МНК оценки обладали некоторым полезными статистическими свойствами необходимо выполнение ряда предпосылок относительно оцениваемой модели, называемыми ***условиями Гаусса-Маркова***.

Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

0. **Модель линейна по параметрам, спецификация корректна!!!**

Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

1. $E(\varepsilon_i) = 0$ **во всех наблюдениях**

Естественное требование, означающее несмещенность в среднем «*наблюдаемых*» значений зависимой переменной относительно «*теоретических*»

Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

1. $E(\varepsilon_i) = 0$

На самом деле это требование несущественно, если в модель включена константа (см. следующий слайд)

Условия Гаусса-Маркова

На примере парной модели : $Y = \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon$

1. $E(\varepsilon_i) = 0$

Допустим $E(\varepsilon_i)=\mu_\varepsilon \neq 0.$

Тогда определим $v = \varepsilon - \mu_\varepsilon$, **так что** $\varepsilon = v + \mu_\varepsilon$

Определим новую ошибку, чтобы убрать смещение.

Условия Гаусса-Маркова

На примере парной модели : $Y = \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon$

1. $E(\varepsilon_i) = 0$

Допустим $E(\varepsilon_i)=\mu_\varepsilon \neq 0$.

Тогда определим $v=\varepsilon - \mu_\varepsilon$, **так что** $\varepsilon = v + \mu_\varepsilon$

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X + v + \mu_\varepsilon = (\beta_1 + \mu_\varepsilon) + \beta_2 X + v$$

где $E(v) = E(\varepsilon - \mu_\varepsilon) = E(\varepsilon) - E(\mu_\varepsilon) = 0$

Смещение случайной составляющей просто вошло в константу

Новая ошибка удовлетворяет условию Гаусса-Маркова

Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

1. $E(\varepsilon_i) = 0$

Это требование можно ослабить даже в моделях без константы.

Достаточно потребовать равенства нулю только условного среднего:

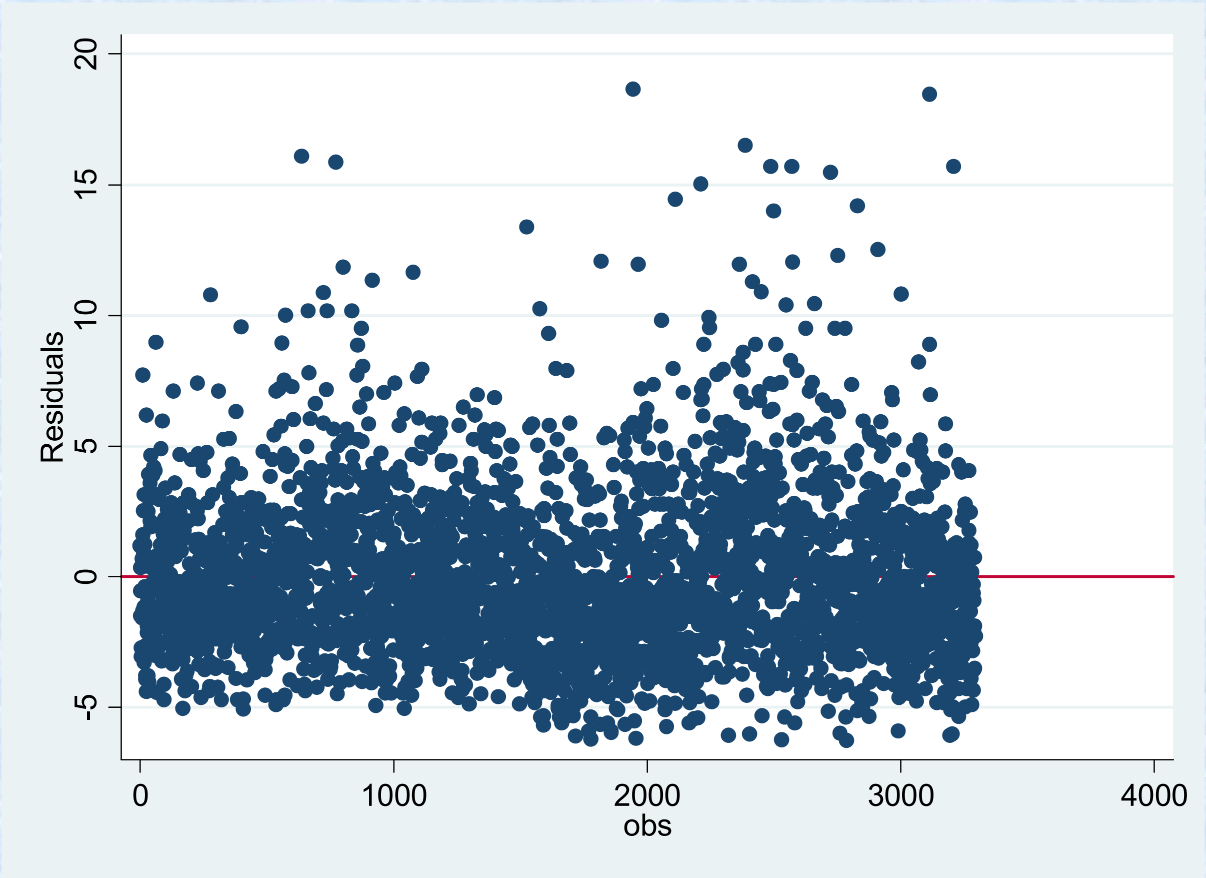
1а). $E(\varepsilon_i | X_i) = 0$

Естественное требование, означающее несмещенность в среднем «*наблюдаемых*» значений зависимой переменной относительно «*теоретических*» <u>в каждом конкретном наблюдении, но не обязательно, что по всей совокупности.</u>

Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

1. $\mathbf{E}(\varepsilon_{\mathrm{i}}) = 0$ **1a).** $E(\varepsilon_i | X_i) = 0$



Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

2. Dε_i =Dε_j (гомоскедастичность)

Дисперсия ошибки u_i одинакова для всех наблюдений i

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2 \ \forall i \qquad \exists i, j : \sigma_i^2 = \mathrm{Var}(\varepsilon_i) \neq \mathrm{Var}(\varepsilon_j) = \sigma_j^2$$

Представляется вполне естественным, что для всех наблюдений степень влияния возмущающего фактора одинаково.

Хотя бывают ситуации, в которых это не так

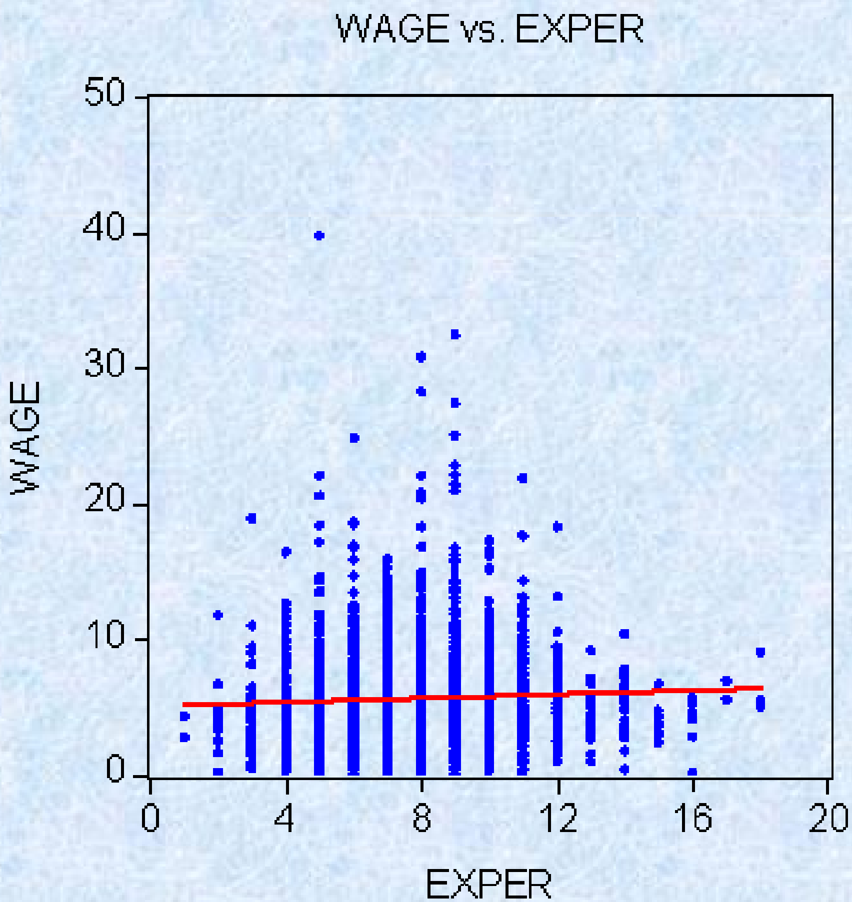
<u>Упражнение1</u>: приведите пример нарушения этого условия.

Условия Гаусса-Маркова

$$Wage = \alpha + \beta * Exper + u$$

2. $D\varepsilon_i \neq D\varepsilon_j$ (гетероскедастичность)

Дисперсия ошибки ε_i неодинакова в разных наблюдениях i



$$\exists i, j : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2$$

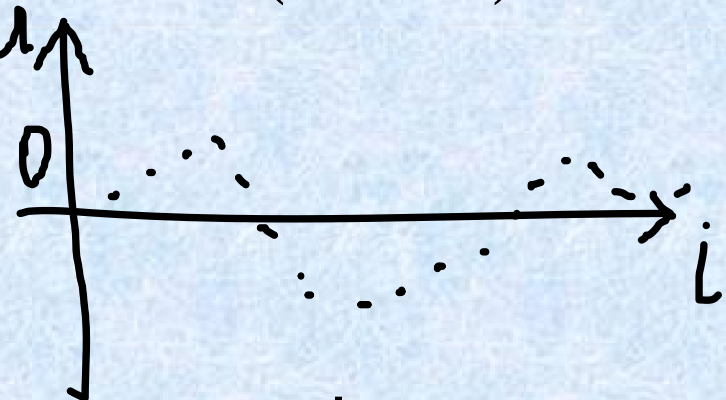
Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

3. Отсутствие автокорреляции- ошибки в разных наблюдениях не связаны между собой

$$\operatorname{cov}\left(\varepsilon_i ; \varepsilon_j\right) \equiv 0 \ \forall i \neq j$$

$$\operatorname{cov}\left(\varepsilon_i ; \varepsilon_j\right) \neq 0$$



Так же вполне естественно, что возмущающие факторы в разных наблюдениях независимы.

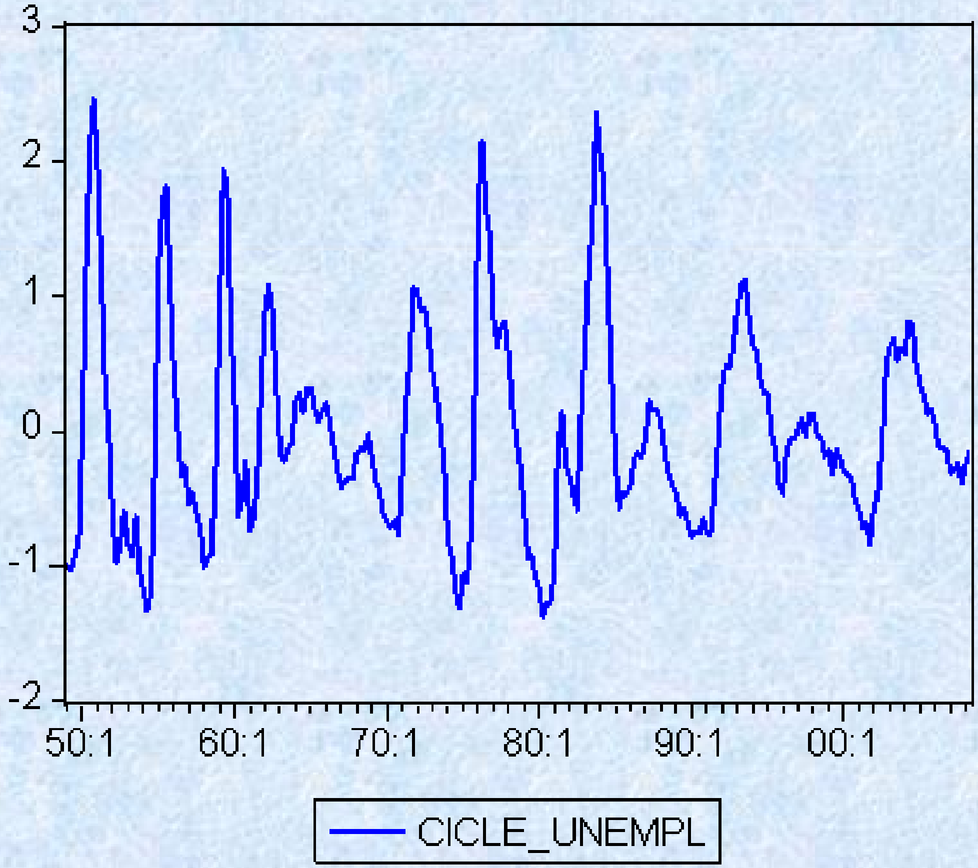
Хотя бывают ситуации, где это требование нарушается.

<u>Упражнение 2</u>: Приведите пример

Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

3. положительная автокорреляция $\operatorname{cov}\left(\varepsilon_i ; \varepsilon_j\right) > 0$



Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

4. X – детерминированная переменная (nonstochastic)

На самом деле достаточно более слабого условия:

4a). X_i и ε_i - независимы между собой: Cov(X, ε)=0

Требование детерминированности регрессоров упрощает анализ, но зачастую не выполняется

Упражнение 3: Привести пример стохастического регрессора

Требование независимости регрессоров и ошибок представляется естественным, хотя тоже может не выполняться.

Упражнение 4: Привести примеры ситуаций с корреляцией ошибок и регрессоров и без оной.

Условия Гаусса-Маркова

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Требование детерминированности может быть так же ослаблено до *предопределенности*- т.е. регрессором может выступать случайная величина, но к моменту наблюдения ее значение уже определено (см. пример)

4. X – предопределенная (predetermined)

В качестве примера может выступать какая-нибудь лагированная переменная, или переменная, носящая случайный характер, но ее распределение нам известно.

Условия Гаусса-Маркова

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

5. Нормальность ошибок: $\varepsilon \sim N\left(\beta_0, \mathbf{I}\sigma^2\right)$

Ошибки *u* имеют совместное многомерное нормальное распределение

Из совместной нормальной распределенности следует нормальность распределения компонент u_i

С учетом преобразований:

$$Y = \mathbf{X}\beta + \varepsilon; \quad \mathrm{E}\,\varepsilon = \beta_0; \quad \mathrm{D}\,\varepsilon = \sigma^2$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon - \beta_0}{\sigma}; \quad \mathrm{E}\,\tilde{\varepsilon} = 0; \quad \mathrm{D}\,\tilde{\varepsilon} = 1$$

$$Y = \beta_0 + \mathbf{X}\beta + \sigma\tilde{\varepsilon}$$

Можно считать, что: $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \sim N\left(\mathbf{0}, \mathbf{I}\right)$

Условие нормальности не необходимое, но зачастую полезное при проведении ряда тестов

БЕЛЫЙ ШУМ

- Условия 1.-3., наложенные на распределения ошибок описываются только свойствами моментов 1 и 2 порядков (***слабый*** *белый шум*):

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{0}; \quad \mathrm{COVAR}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \sigma^2 \mathbf{I}$$

- Условие 5. (требование нормальности)- *белый* ***гауссовский*** *шум*

- Условия 1.-4. могут быть заменены на более слабые:

$$\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\varepsilon} \mid \mathbf{X}\right) = \mathbf{0}; \quad \mathrm{COVAR}\left(\boldsymbol{\varepsilon} \mid \mathbf{X}\right) = \sigma^2 \mathbf{I}; \quad \mathrm{cov}\left(\mathbf{X}; \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{0}$$

Предпосылки использования МНК (условия Гаусса – Маркова)

0^0. Регрессионная модель является ***линейной относительно параметров*** и корректно специфицирована.

1^0. Случайное отклонение имеет ***нулевое*** математическое ожидание (условное).

2^0. Дисперсия случайного члена ***постоянна***.

3^0. Ошибки в разных наблюдениях ***независимы*** (некоррелированы) друг относительно друга.

4^0. Ошибки ***независимы*** (некоррелированы) с регрессорами.

5^0. Ошибки из себя представляют **слабый белый** (гауссовский) **шум.**

ТЕОРЕМА ГАУССА-МАРКОВА

В ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ,
В КОТОРОЙ ОШИБКИ ЯВЛЯЮТСЯ БЕЛЫМ ШУМОМ,
А МНОЖЕСТВО РЕГРЕССОРОВ ЛНЗ:

1. **ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ЯВЛЯЮТСЯ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕСМЕЩЕННЫМИ**
2. **В ЭТОМ КЛАССЕ ОНИ ЯВЛЯЮТСЯ ЭФФЕКТИВНЫМИ (BLUE –best linear unbiased estimators)**

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ТРИ СМЫСЛА СЛОВА **«ОЦЕНКА»**

1. **ОЦЕНКА –ESTIMATION**

   Процесс получения численного значения параметра (оценивание)

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ТРИ СМЫСЛА СЛОВА **«ОЦЕНКА»**

2. ОЦЕНКА –ESTIMATOR

Функция (статистика), с помощью которой по выборке вычисляется численное значения параметра

<u>Примеры</u>:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}; \quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ТРИ СМЫСЛА СЛОВА **«ОЦЕНКА»**

3. ОЦЕНКА –ESTIMATION

Численное значения параметра, вычисленное по выборке с помощью определенной функции (статистики)

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- ЛИНЕЙНОСТЬ
- НОРМАЛЬНОСТЬ
- НЕСМЕЩЕННОСТЬ
- СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ
- ЭФФЕКТИВНОСТЬ

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

БОЛЕЕ СЛАБЫЕ СВОЙСТВА

- ЛИНЕЙНОСТЬ
- АСИМПОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ
- АСИМПОТИЧЕСКАЯ НЕСМЕЩЕННОСТЬ
- СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ
- АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- ЛИНЕЙНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Оценка является линейной, если она является линейным функционалом

$$\hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1} X'Y$$

$$\hat{Y} = X\left(X'X\right)^{-1} X'Y = PY$$

$$e = Y - \hat{Y} = \left(I - P\right)Y = MY$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- НОРМАЛЬНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Оценка является нормальной, если ее распределение -нормально $\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}; \sigma^2 \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right)$

$$X_i - i.i.d. \sim \mathrm{N}\left(\mu_i; \sigma_i^2\right)$$

$$Z = a + bX_i \sim \mathrm{N}\left(a + b\mu_i; b^2\sigma_i^2\right)$$

$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1 + \mu_1; \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2\right)$$

$$X_i \sim \mathrm{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \Rightarrow \hat{\mu} = \overline{X} \sim \mathrm{N}\left(\mu; \frac{\sigma^2}{N}\right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- НОРМАЛЬНОСТЬ

$$\mathbf{X} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\mu}; \Sigma\right)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{X} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\mu}; \mathbf{B}\Sigma\mathbf{B}^{'}\right)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}; \sigma^2\mathbf{I}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}; \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Оценка является нормальной, если ее распределение -нормально В ПРЕДЕЛЕ (число наблюдений стремится к бесконечности)

$$X_i \sim B_p \Rightarrow \hat{p} = \overline{X} \underset{n \to \infty}{\sim} \mathrm{N}\left(p; \frac{p(1-p)}{N} \right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}; \sigma^2 \mathbf{I}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}; \sigma^2 \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right)$$

$$\sqrt{\frac{N}{s^2}} \left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{N}\right)^{1/2} \left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}\right) \underset{n \to \infty}{\sim} \mathrm{N}\left(\mathbf{0}; \mathbf{I}\right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- НЕСМЕЩЕННОСТЬ

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>

Оценка является несмещенной, если ее математическое ожидание равно истинному значению параметра

$$e_i \sim N\left(0;\mathbf{M}_{ii}\right),\quad \mathrm{E}\, e_i = a = 0$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},\quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N\left(\mathbf{0};\sigma^2\mathbf{I}\right)$$

$$\mathrm{E}\,\bar{e} = \mathrm{E}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} e_i}{N}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}\, e_i}{N} = \frac{Na}{N} = a = 0$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- НЕСМЕЩЕННОСТЬ

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N\left(\mathbf{0}; \sigma^2 \mathbf{I}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathrm{E}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\,\mathrm{E}\,\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta}$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- НЕСМЕЩЕННОСТЬ

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N\left(\mathbf{0}; \sigma^{\mathbf{2}}\mathbf{I}\right)$$

$$s^2 = \frac{RSS}{N-k}, \quad \frac{RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-k}$$

$$\mathrm{E}\, s^2 = \frac{\mathrm{E}\left(\sigma^2 \dfrac{RSS}{\sigma^2}\right)}{\left(N-k\right)} = \frac{\sigma^2\left(N-k\right)}{\left(N-k\right)} = \sigma^2$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НЕСМЕЩЕННОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Оценка является несмещенной, если ее математическое ожидание равно истинному значению параметра В ПРЕДЕЛЕ **(число наблюдений стремится к бесконечности)**

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НЕСМЕЩЕННОСТЬ

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N\left(\mathbf{0}; \sigma^{\mathbf{2}}\mathbf{I}\right)$$

$$\widehat{\sigma^{\mathbf{2}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} e_i^2}{N}$$

$$\mathrm{E}\,\widehat{\sigma^{\mathbf{2}}} = \mathrm{E}\left(\frac{N}{N-k}s^2\right) = \frac{N}{N-k}\mathrm{E}\,s^2 = \frac{N}{N-k}\sigma^{\mathbf{2}} \xrightarrow[N\to\infty]{} \sigma^{\mathbf{2}}$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Оценка является состоятельной, если она сходится по вероятности к истинному значению параметра

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ВИДЫ СХОДИМОСТИ

- **Сильная («почти наверное», «как есть», "as is")**
- **«в среднеквадратичном»**
- **«по вероятности» (plim)**
- **Слабая («по распределению»)**

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ВИДЫ СХОДИМОСТИ

- **Сильная («почти наверное», «как есть», "as is”)**

<u>Определение</u>

Последовательность случайных величины Xk сходится «почти наверное» к случайной величине Z, если:

$$\mathrm{P}\left(\omega : X_k(\omega) \xrightarrow[k\to\infty]{} Z(\omega)\right) = 1$$

$$\left(X_k \xrightarrow{as} Z\right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ВИДЫ СХОДИМОСТИ

- **«в среднеквадратичном»**

Определение

Последовательность случайных величины Xk сходится «в среднеквадратичном» к случайной величине Z, если:

$$\mathrm{E}\left(\left|X_k - Z\right|^2\right) \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

$$\left(X_k \xrightarrow{ms} Z\right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ВИДЫ СХОДИМОСТИ

- **«по вероятности» (plim)**

Определение

Последовательность случайных величины Xk сходится «по вероятности» к случайной величине Z, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathrm{P}\Big(\omega : \quad \big|X_k(\omega) - Z(\omega)\big| \geq \varepsilon\Big) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

$$\left(Z = \operatorname*{plim}_{k\to\infty} X_k, \quad X_k \xrightarrow{P} Z \right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ВИДЫ СХОДИМОСТИ

- **Слабая «по распределению»**

<u>Определение</u>

Последовательность случайных величины Xk сходится «по распредеоению» к случайной величине Z, если:

$$\forall x \quad \mathrm{F}_{X_k}\left(x\right) \to \mathrm{F}_Z\left(x\right)$$

$$\left(X_k \xrightarrow{d} Z, \quad X_k \Rightarrow Z\right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ВИДЫ СХОДИМОСТИ

- **Сильная («почти наверное», «как есть», “as is”)**
- **«в среднеквадратичном»**
- **«по вероятности» (plim)**
- **Слабая («по распределению»)**

Почти наверное→По вероятности →По распределению

В среднеквадратичном →По вероятности →По распределению

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ПРИМЕРЫ СХОДИМОСТИ

Сильная («почти наверное», «как есть», “as is”)

$$X_k = \frac{Z}{k} \xrightarrow{as} 0, \quad Z \sim B_p$$

«по вероятности» (plim)

$$\mathrm{E}\, X_k = a, \quad \overline{X} \sim \mathrm{N}\left(a; \frac{\sigma^2}{k}\right), \quad \overline{X} \xrightarrow{P} a$$

Слабая («по распределению»)

$$\mathrm{F}_{X_k}\left(x\right) \xrightarrow{d} \mathrm{F}_X\left(x\right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

СВОЙСТВА СХОДИМОСТИ

- **«по вероятности» (plim)**

Устойчиво относительно

сложения, вычитания, умножения,

функциональных преобразований

Следствие 1: все эмпирические моменты сходятся по вероятности к теоретическим

Следствие 2: все оценки, получаемые с помощью арифметических операций или функциональных преобразований над моментами состоятельны

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ

Теорема

Если оценка параметра несмещенная, а ее дисперсия стремится к нулю, то она – состоятельна

Пример:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(0; \sigma^2 \mathbf{I}\right)$$

$$s^2 = \frac{RSS}{N-k}, \quad \frac{RSS}{\sigma^2} \sim \chi^2_{N-k}$$

$$\mathrm{E}\, s^2 = \sigma^2, \quad \mathrm{D}\, s^2 = \frac{\mathrm{D}\left(RSS\right)}{\left(N-k\right)^2} = \frac{\mathrm{D}\left(\sigma^2 \dfrac{RSS}{\sigma^2}\right)}{\left(N-k\right)^2} = \frac{2\left(N-k\right)\sigma^4}{\left(N-k\right)^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СОСТОЯТЕЛЬНОСТИ

Теорема

Если оценка параметра несмещенная, а ее дисперсия стремится к нулю, то она – состоятельна

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(0; \sigma^2 \mathbf{I}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta}; \sigma^2 \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right)$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \sigma^2 \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} = \frac{\sigma^2}{N}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{N}\right)^{-1} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \cdot \mathbf{Q} = 0$$

оценка коэффициентов состоятельна, т.к.

$\dfrac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbf{Q}$ в силу устойчивости выборочных характеристик

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

СОСТОЯТЕЛЬНОСТЬ ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ В ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

$$\mathbf{Y} = \beta_0 + \mathbf{X}\beta_1 + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathrm{N}\left(0; \sigma^2 \mathbf{I}\right)$$

$$\mathrm{VAR}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \sigma^2 \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} = \frac{1}{N^2\,\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)} \begin{bmatrix} \sum X_{1i}^2 & -\sum X_{1i} \\ -\sum X_{1i} & N \end{bmatrix}$$

$$\widehat{\mathrm{var}}\left(\hat{\beta}_0\right) = \frac{s^2 \sum X_{1i}^2}{N^2\,\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)} = \frac{s^2}{N}\left(1 + \frac{\bar{\mathbf{X}}_1^2}{\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

$$\widehat{\mathrm{var}}\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{s^2}{N\,\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0;$$

$$\widehat{\mathrm{cov}}\left(\hat{\beta}_0; \hat{\beta}_1\right) = \frac{-s^2 \sum X_{1i}}{N^2\,\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)} = \frac{-s^2 \bar{\mathbf{X}}_1}{N\,\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ-СОСТОЯТЕЛЬНЫ

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Мерой эффективности оценки является величина:

$$\mathrm{E}\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left(\hat{\beta}-E\hat{\beta}+E\hat{\beta}-\beta\right)^2 = \mathrm{E}\left(\hat{\beta}-E\hat{\beta}\right)^2 + \mathrm{E}\left(\beta-E\hat{\beta}\right)^2 =$$

$$= \mathrm{D}\left(\hat{\beta}\right) + bias\left(\hat{\beta}\right)^2$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- ЭФФЕКТИВНОСТЬ

По эффективности можно сравнивать только оценки с одинаковым смещением!!!

Определение:

Одна оценка более эффективна (строго) другой, если ее мера эффективности не больше (меньше)

$$\mathrm{E}\left(\hat{\beta}-\beta\right)^2 \le \mathrm{E}\left(\tilde{\beta}-\beta\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{D}\left(\hat{\beta}\right)+bias\left(\hat{\beta}\right)^2 \le \mathrm{D}\left(\tilde{\beta}\right)+bias\left(\tilde{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{D}\left(\hat{\beta}\right) \le \mathrm{D}\left(\tilde{\beta}\right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Можно ставить задачу отыскания самой эффективной оценки в определенном классе (например среди линейных несмещенных оценок)

Определение:

Оценка называется эффективной, если ее мера эффективности будет не больше для любой другой оценки из того же класса

$$\mathrm{E}\left(\widehat{\beta}-\beta\right)^2 \le \mathrm{E}\left(\widetilde{\beta}-\beta\right)^2 \quad \forall \widetilde{\beta} \in K\left(\widehat{\beta}\right)$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

- АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Можно ставить задачу отыскания самой эффективной оценки в определенном классе (например среди линейных несмещенных оценок)

<u>Определение</u>:

Оценка называется асимптотически эффективной, если В ПРЕДЕЛЕ ее мера эффективности будет не больше для любой другой оценки из того же класса

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left(\widehat{\beta}_N - \beta\right)^2 \le \mathrm{E}\left(\widetilde{\beta} - \beta\right)^2 \quad \forall \widetilde{\beta} \in K\left(\left\{\widehat{\beta}_N\right\}\right)$$

ТЕОРЕМА ГАУССА-МАРКОВА

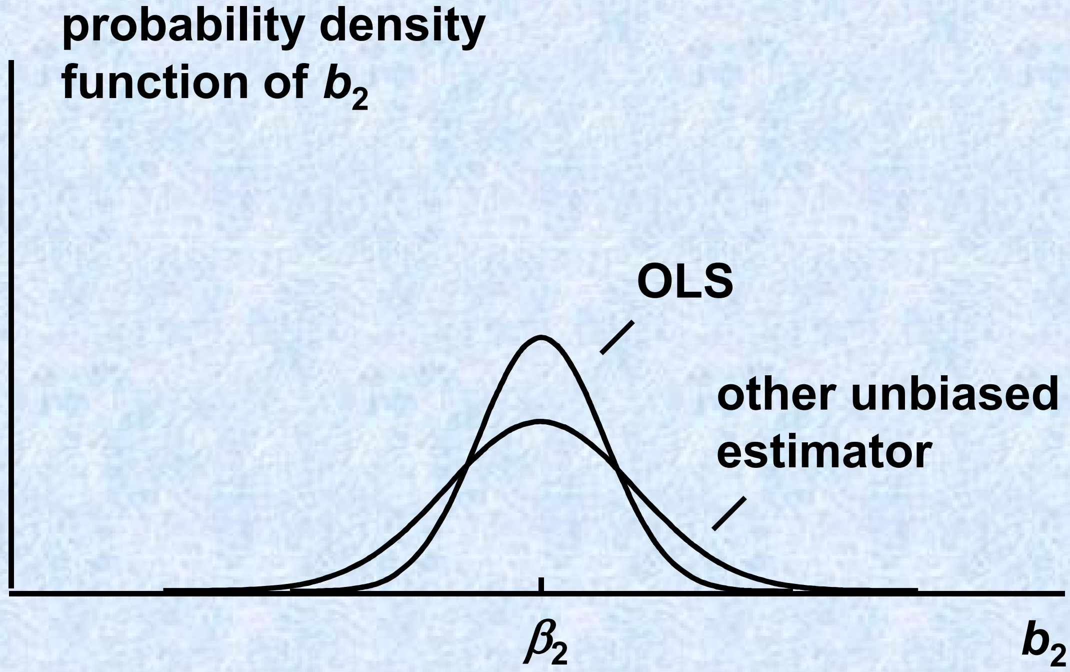
В ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ,
В КОТОРОЙ ОШИБКИ ЯВЛЯЮТСЯ БЕЛЫМ ШУМОМ,
А МНОЖЕСТВО РЕГРЕССОРОВ ЛНЗ:
1. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ЯВЛЯЮТСЯ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕСМЕЩЕННЫМИ
2. В ЭТОМ КЛАССЕ ОНИ ЯВЛЯЮТСЯ ЭФФЕКТИВНЫМИ (BLUE –best linear unbiased estimators)

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МНК-ОЦЕНОК

На примере парной модели: $Y = \beta_1 + \beta_2 X + u$

Эффективность является мерой отклонения от истинного значения

для <u>несмещенной</u> оценки это эквивалентно вариации



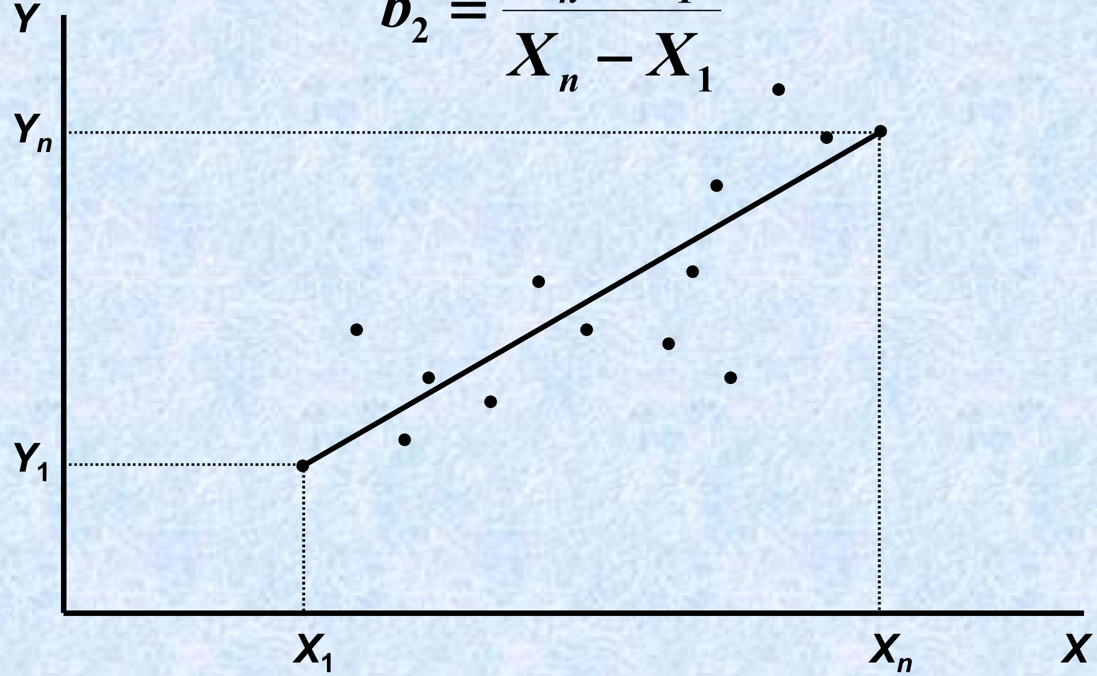
Теорема Гаусса-Маркова утверждает,
что любая другая линейная несмещенная оценка будет иметь большую дисперсию,
чем МНК-оценка.

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МНК-ОЦЕНОК

На примере парной модели: $Y = \beta_1 + \beta_2 X + \varepsilon$

Рассмотрим иную оценку коэффицента наклона, нежели МНК:

$$b_2 = \frac{Y_n - Y_1}{X_n - X_1}$$



<u>Упражнение 1</u>: Проверьте, что эта оценка- линейна по *Y*

ЭФФЕКТИВНОСТЬ МНК-ОЦЕНОК

На пример парной модели**:** $\boldsymbol{Y = \beta_1 + \beta_2 X + u}$

Сопоставление дисперсий оценок, показывает, что при количестве наблюдений больше двух, МНК-оценка является более эффективной

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{Y_n - Y_1}{X_n - X_1} \qquad \operatorname{Var} \widehat{\beta}_2 = \frac{2\sigma_\varepsilon^2}{(X_n - X_1)^2}$$

$$\widehat{\beta}_2^{\text{OLS}} = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\operatorname{Var}(X)} \qquad \operatorname{Var}\left(\widehat{\beta}_2^{\text{ols}}\right) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n \operatorname{Var}(X)}$$

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

влияние параметров выборки на дисперсию оценок

(на примере парной регрессии)

$$\widehat{\mathrm{var}}\left(\widehat{\beta}_0\right) = \frac{s^2 \sum X_{1i}^2}{N^2\,\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)} = \frac{s^2}{N}\left(1 + \frac{\overline{\mathbf{X}}_1^2}{\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)}\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

$$\widehat{\mathrm{var}}\left(\widehat{\beta}_1\right) = \frac{s^2}{N\,\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0;$$

$$\widehat{\mathrm{cov}}\left(\widehat{\beta}_0;\widehat{\beta}_1\right) = \frac{-s^2 \sum X_{1i}}{N^2\,\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)} = \frac{-s^2\,\overline{\mathbf{X}}_1}{N\,\mathrm{VAR}\left(\mathbf{X}_1\right)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

**Оценки тем точнее, чем больше наблюдений
и чем разнообразнее выборка по значениям регрессоров**

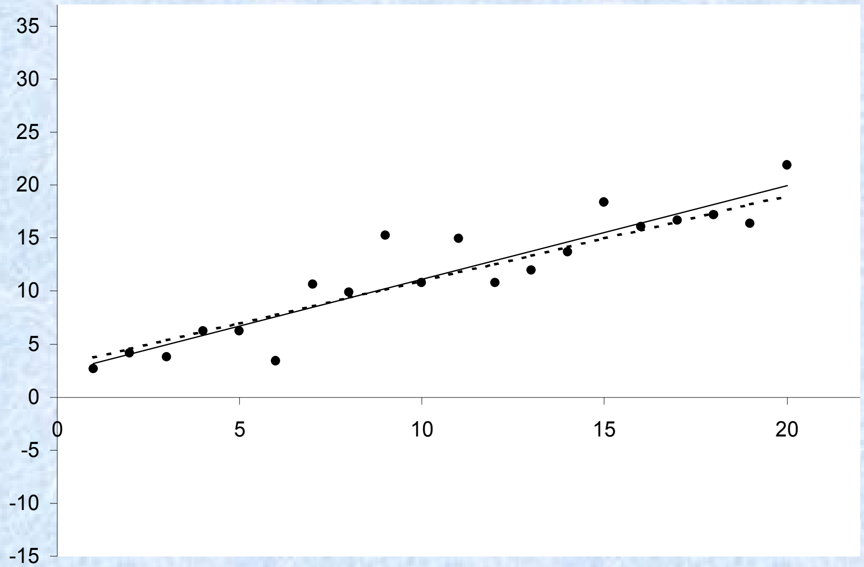
Чем больше дисперсия оценок- тем менее точны оценки коэффициентов

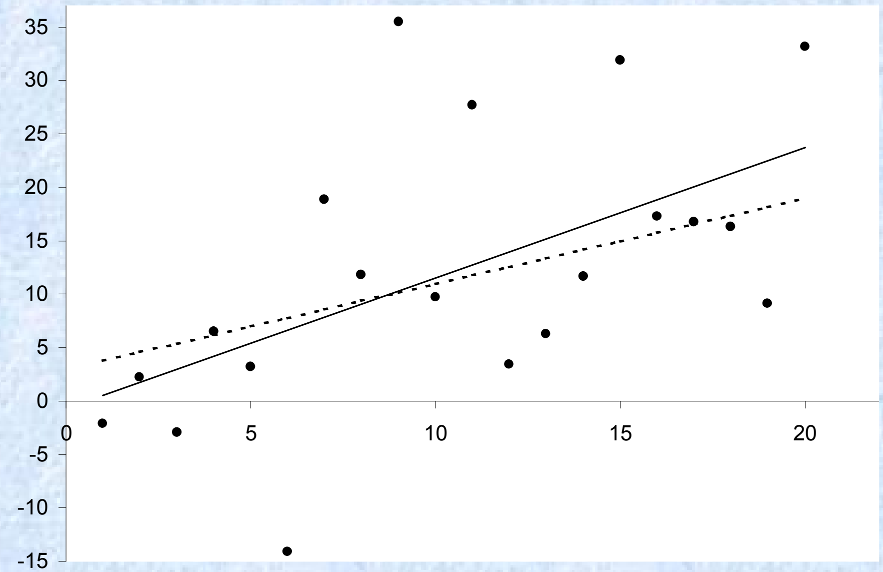
**При большом количестве наблюдений оценки практически независимы и
совпадают с истинным теоретическим значением**

СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

влияние параметров выборки на дисперсию оценок
(на примере парной регрессии)

Чем больше дисперсия оценок- тем менее точны оценки коэффициентов

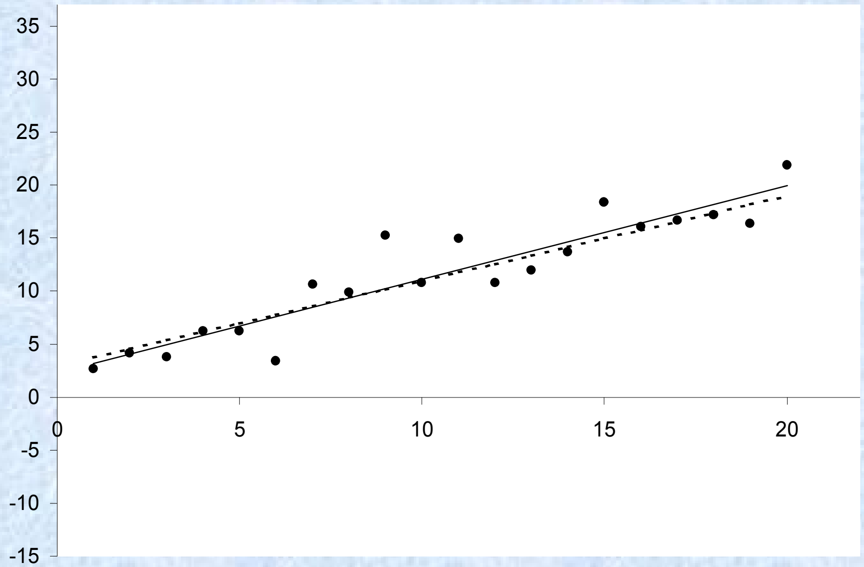


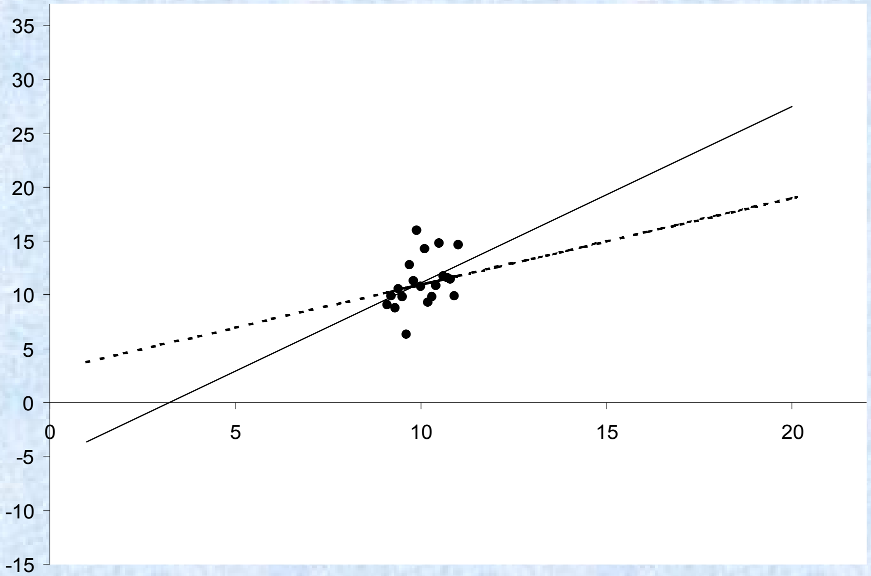


СВОЙСТВА ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ

влияние параметров выборки на дисперсию оценок
(на примере парной регрессии)

Оценки тем точнее, чем разнообразнее выборка по значениям регрессоров





Конец лекции