Спецификация уравнения множественной регрессии.

Лекция 11

Цели лекции

1. Свести вместе все, что мы знаем о выборе формы зависимости и рассмотреть особенности многомерного случая

2. Изучить последствия неправильного выбора функциональной формы

3. Найти средства, позволяющие улучшить качество выбора формы связи

Направления анализа и развития линейной регрессии

- Ключевые точки (начало координат)
- Кривая или прямая
- Форма криволинейной зависимости
- Вспомогательные экономические показатели (скорость и темп роста, эластичность)
- Уточнение формы (экстремумы, пределы)
- Сравнение функциональных форм

Линейность и нелинейность

household	bananas (lbs) *Y*	income ($10,000) *X*
1	1.71	1
2	6.88	2
3	8.25	3
4	9.52	4
5	9.81	5
6	11.43	6
7	11.09	7
8	10.87	8
9	12.15	9
10	10.94	10

Линейность и нелинейность

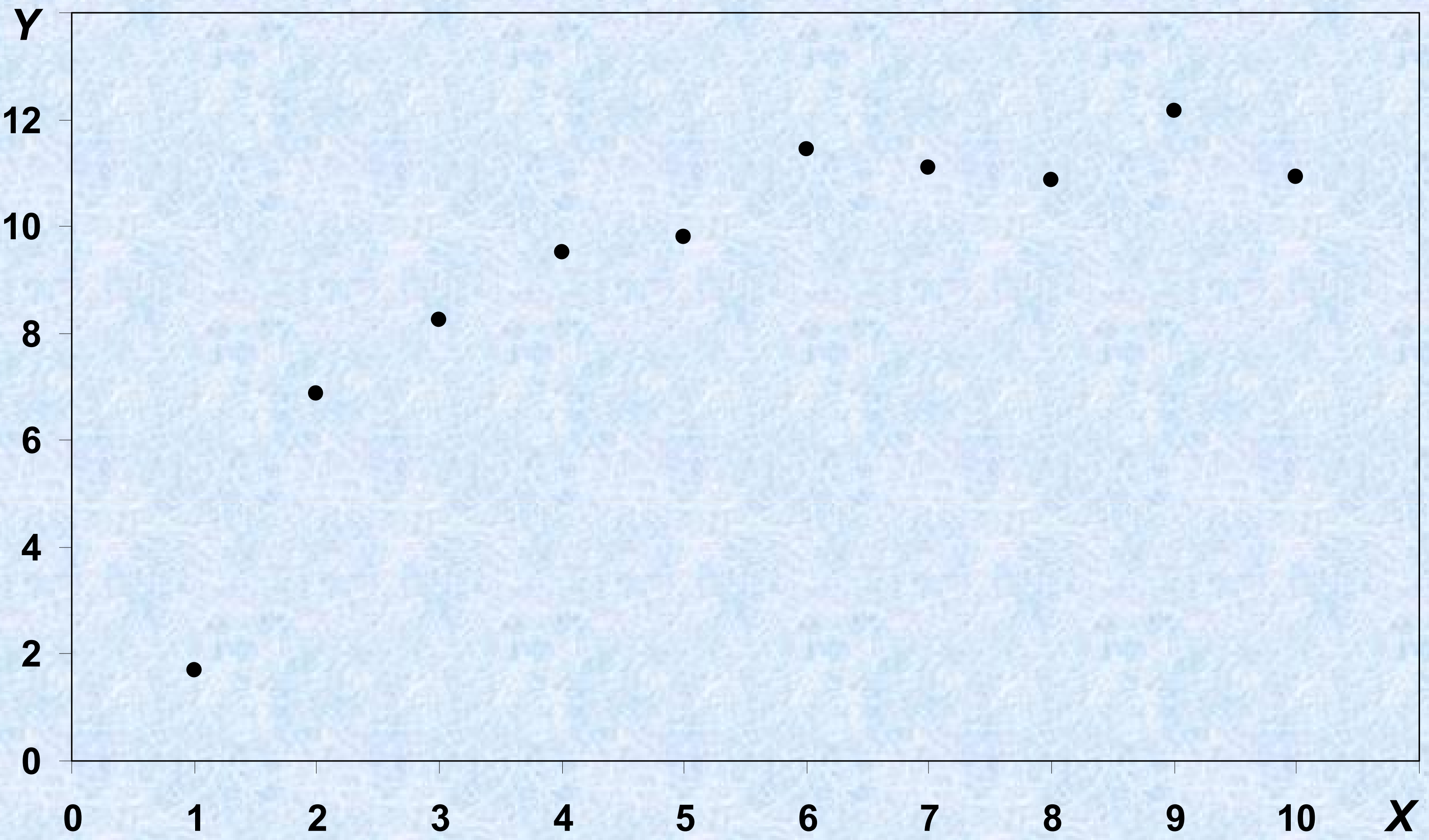
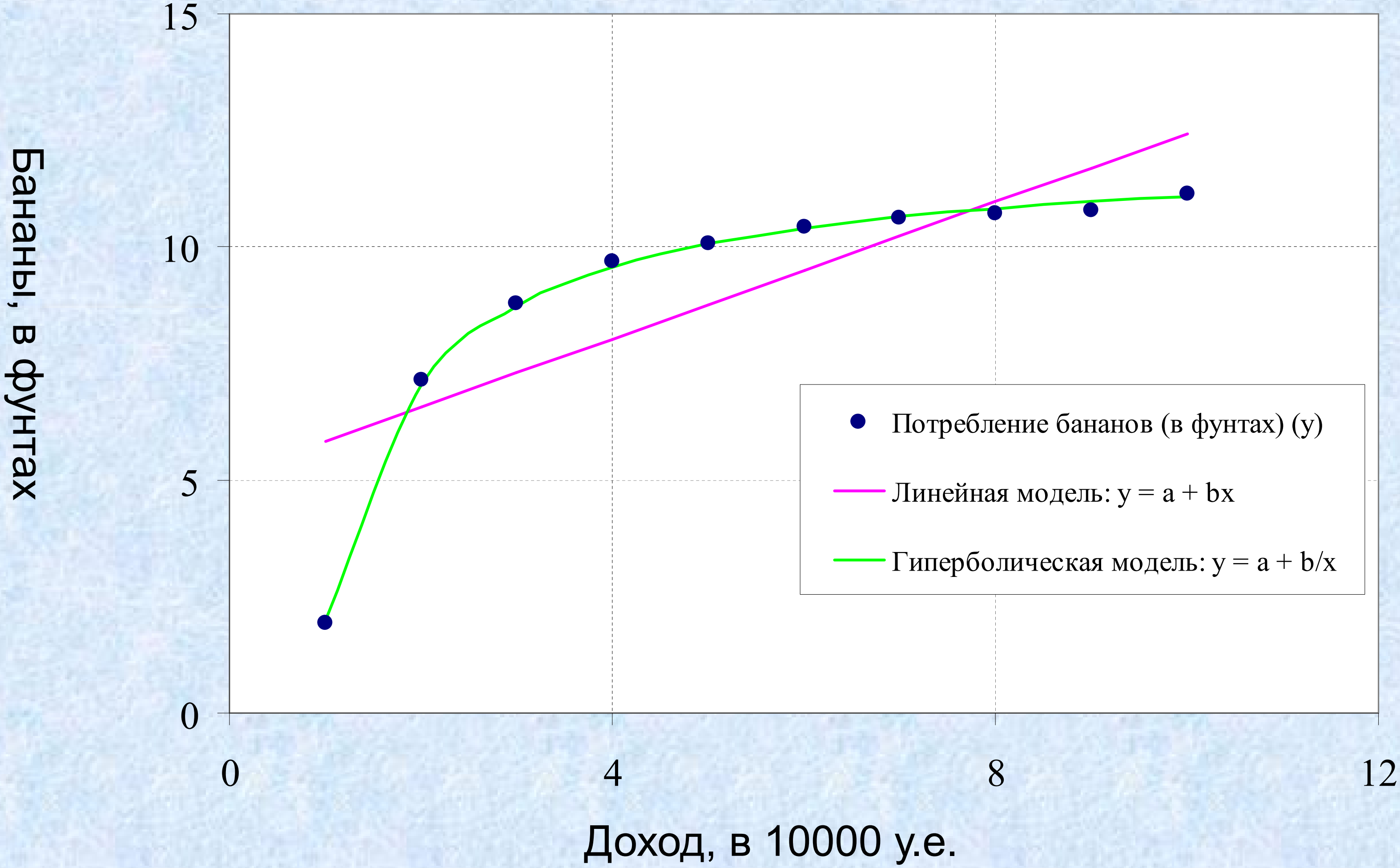


Диаграмма рассеяния похожа на линейную зависимость, но будет ли она качественной?.

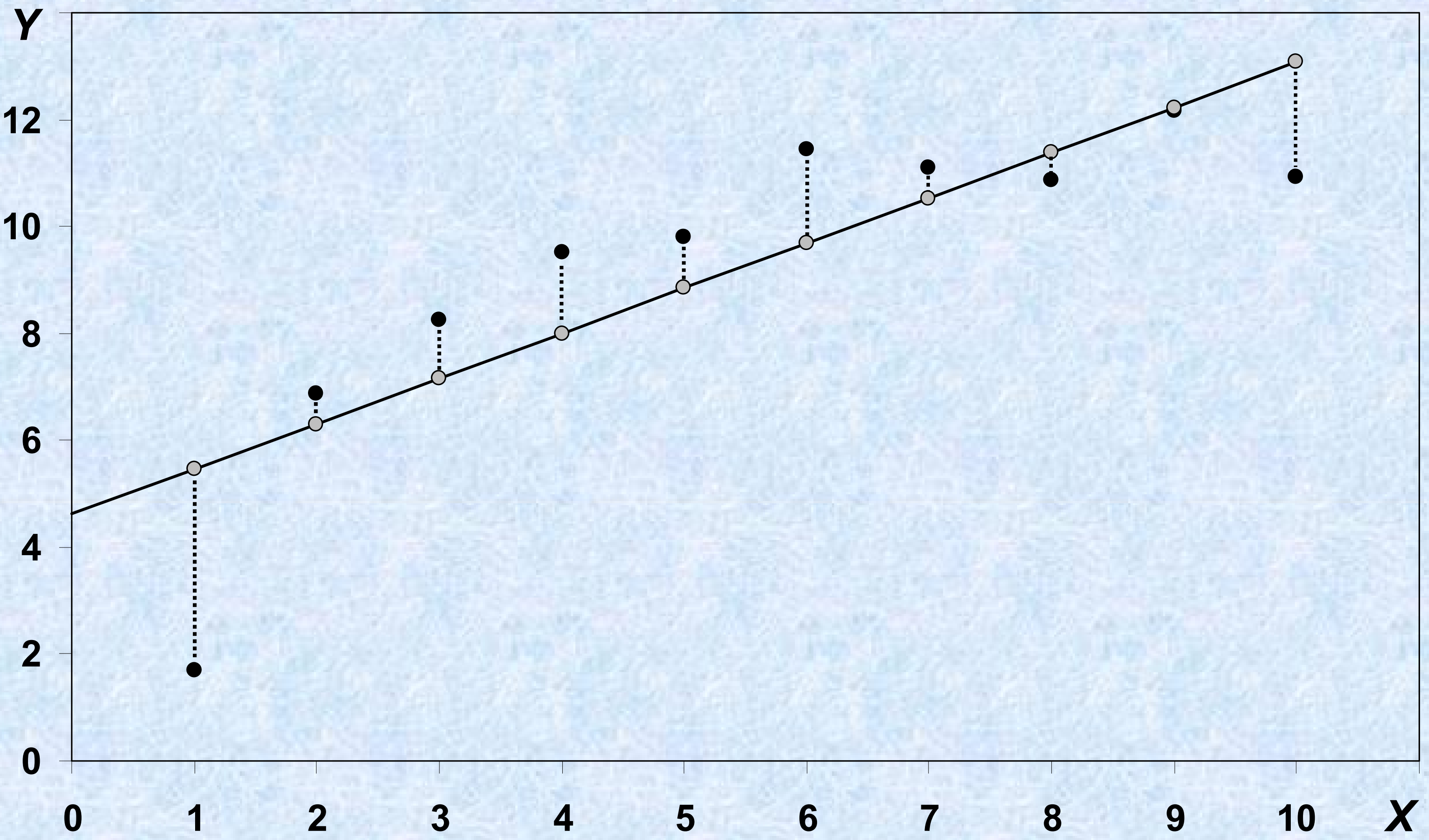
Пример нелинейной зависимости



Линейная модель

```
. reg Y X

  Source |       SS       df       MS              Number of obs =      10
---------+------------------------------           F(  1,     8) =   17.44
   Model |  58.8774834     1  58.8774834           Prob > F      =  0.0031
Residual |   27.003764     8   3.3754705           R-squared     =  0.6856
---------+------------------------------           Adj R-squared =  0.6463
   Total |  85.8812475     9  9.54236083           Root MSE      =  1.8372

------------------------------------------------------------------------------
       Y |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       X |   .8447878   .2022741      4.176   0.003        .378343    1.311233
   _cons |   4.618667   1.255078      3.680   0.006       1.724453    7.512881
------------------------------------------------------------------------------
```

Линейность и нелинейность



В остатках наблюдается положительная автокорреляция- вряд ли линейная форма удачна

Обратная зависимость

Revised model:

$$Y = \beta_1 + \frac{\beta_2}{X} + u$$

Relating *Y* to 1/*X* would be more sensible. *Y* still increases with *X* if $\beta_2 < 0$, but the rate of increase falls and there is an upper limit, β_1. After all, you can eat only so many bananas.

Линейность и нелинейность

Revised model:

$$Y = \beta_1 + \frac{\beta_2}{X} + u$$

$$Z = \frac{1}{X}$$

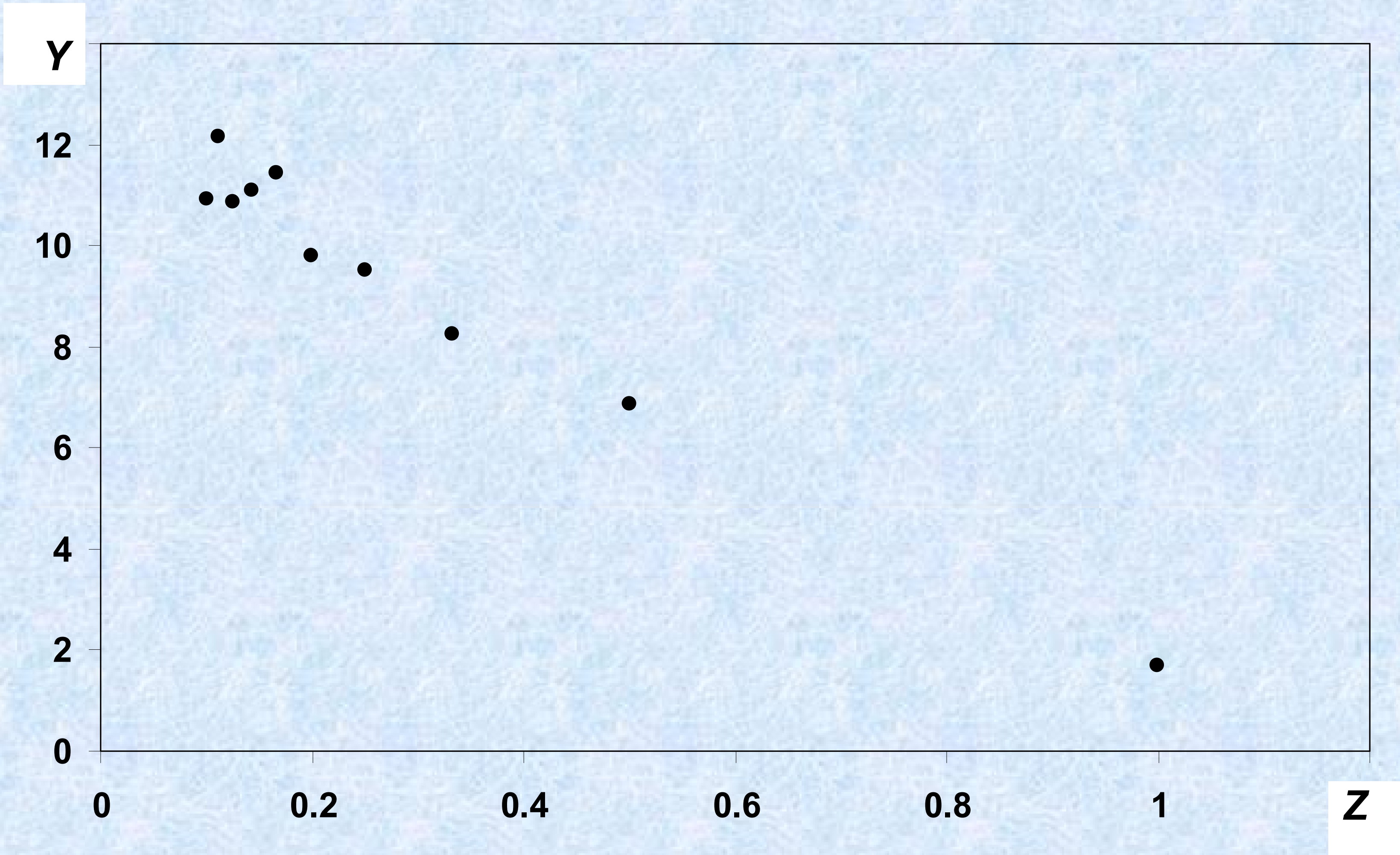
$$Y = \beta_1 + \beta_2 Z + u$$

Линейность и нелинейность

household	bananas (lbs) *Y*	income ($10,000) *X*	*Z*
1	1.71	1	1.00
2	6.88	2	0.50
3	8.25	3	0.33
4	9.52	4	0.25
5	9.81	5	0.20
6	11.43	6	0.17
7	11.09	7	0.14
8	10.87	8	0.13
9	12.15	9	0.11
10	10.94	10	0.10

The next step is to calculate the data for *Z* from the data for *X*. All serious regression applications allow you to create new variables from existing ones.

Линейность и нелинейность

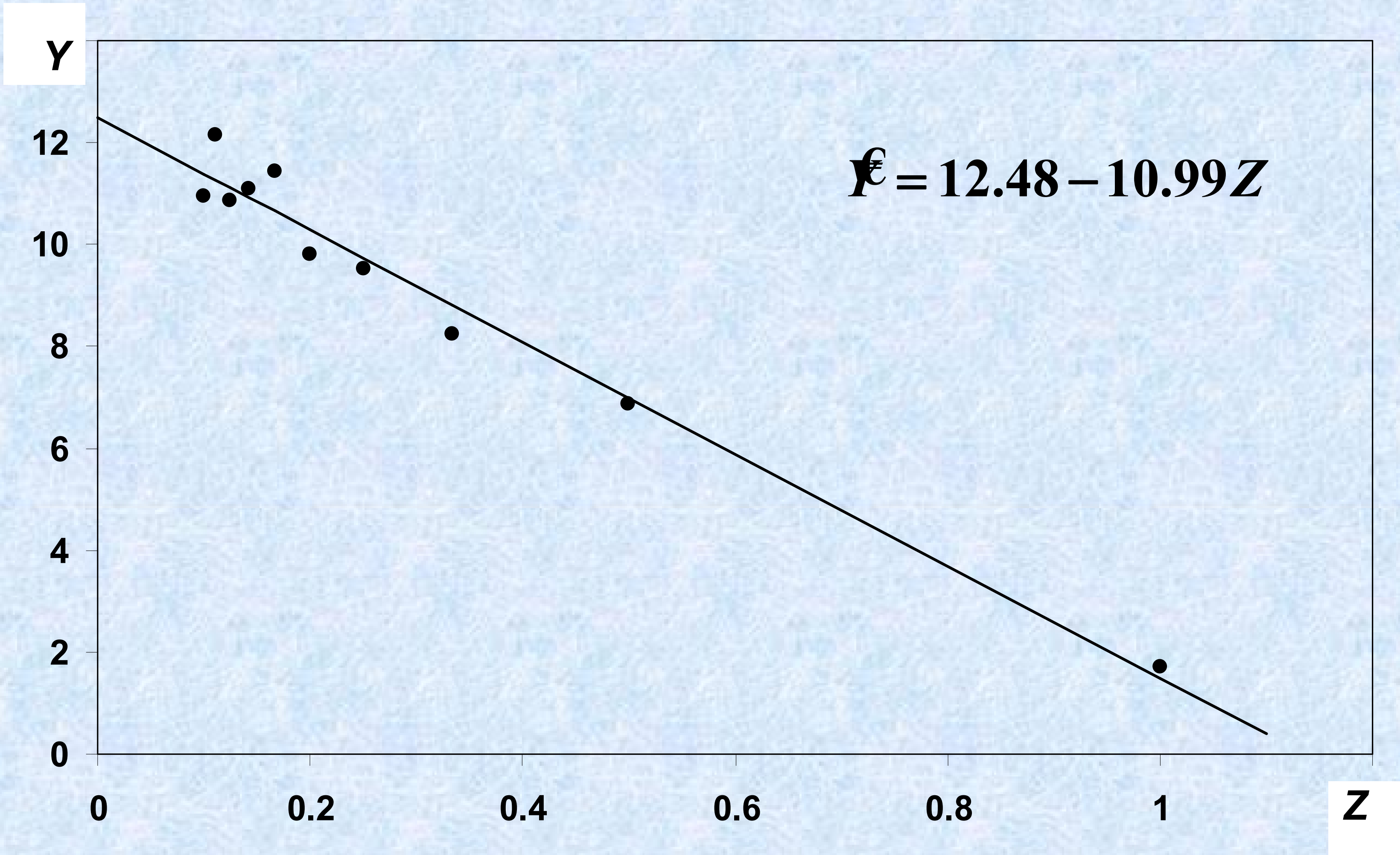


Here is the scatter diagram for *Y* and *Z*.

Обратная зависимость

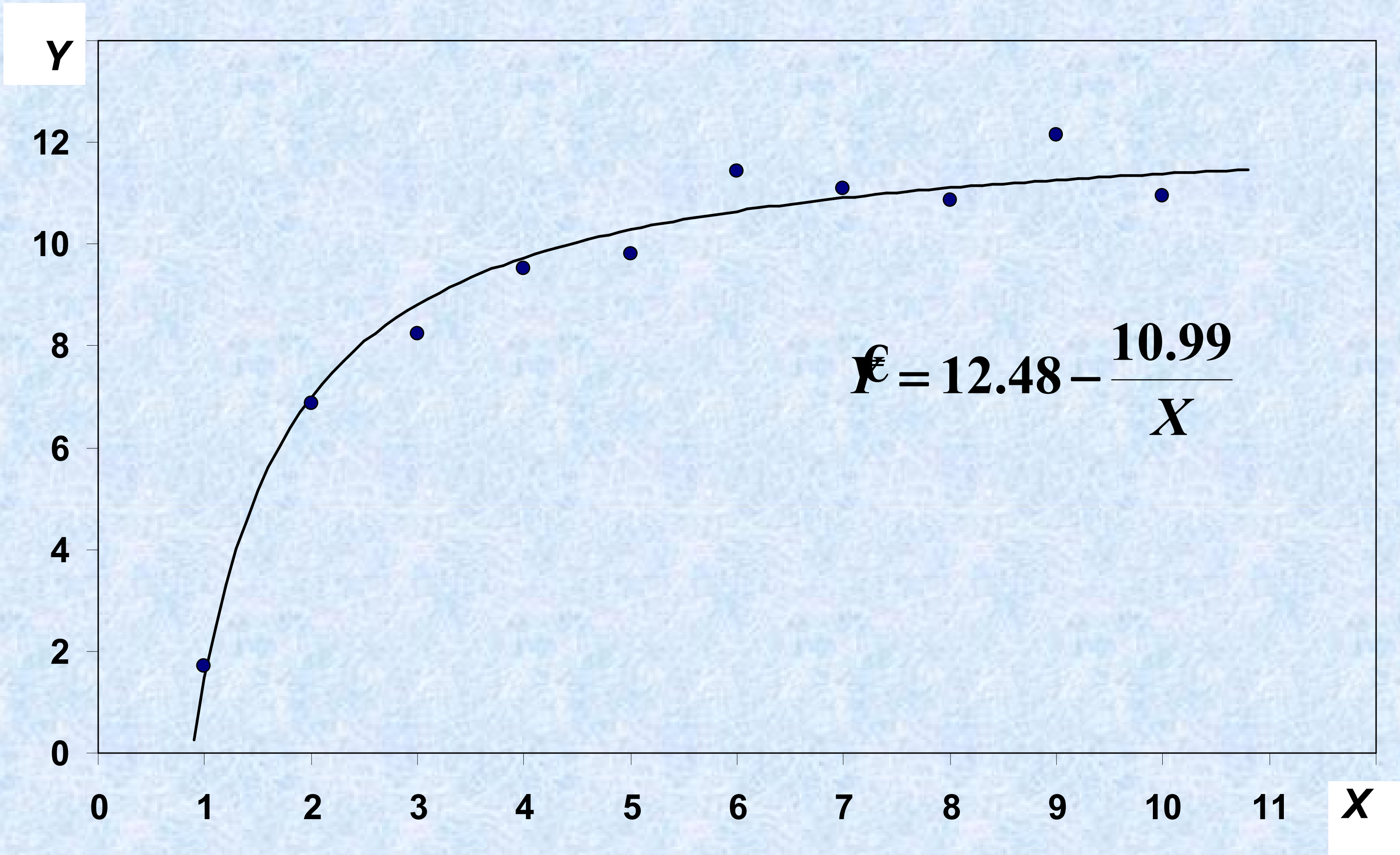
```
. g Z=1/X

. reg Y Z

  Source |       SS       df       MS              Number of obs =      10
---------+------------------------------           F(  1,     8) =  286.10
   Model |  83.5451508     1  83.5451508           Prob > F      =  0.0000
Residual |  2.33609666     8  .292012083           R-squared     =  0.9728
---------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9694
   Total |  85.8812475     9  9.54236083           Root MSE      =  .54038

------------------------------------------------------------------------------
       Y |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
       Z |  -10.98865   .6496573    -16.915   0.000      -12.48677   -9.490543
   _cons |   12.48354   .2557512     48.811   0.000       11.89378    13.07331
------------------------------------------------------------------------------
```

Обратная зависимость



Here is the scatter diagram again with the regression line plotted.

Обратная зависимость



Substituting the reciprocal of *X* for *Z* and plotting the curve in the original diagram, we get a much better fit.

Анализ и развитие линейной модели

Этапы построения модели

- 1. Выбор теоретических предпосылок
- 2. Формализация предпосылок
- 3. Математический вывод зависимости
- 4. Анализ построенной модели

Производственная функция Кобба-Дугласа

Многие экономические процессы не являются линейными по сути. Их моделирование линейнымиуравнениями не даст положительного результата.

Пример. Производственная функция Кобба – Дугласа

$$Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

Y – объем выпуска; *K*, *L* – затраты капитала и труда; α, β – параметры модели.

Функциональные формы

Правила выбора формы зависимости

1) Исходить из экономической теории
2) Оценивать формальное качество
3) Дополнительно проверять по нескольким содержательным критериям

Анализ и развитие линейной модели

Пример: **Анализ роста**

Теоретический феномен –

экономический рост

Анализ предпосылок:

прирост пропорционален накопленному потенциалу

Формализация предпсылок:

$$dY = \beta Y \Rightarrow \frac{dY}{Y} = \beta \Rightarrow \ln Y = \alpha + \beta t$$

Интерпретация

коэффициент β – годовой темп роста

Классы нелинейных регрессий

Различают ***два класса*** нелинейных регрессий:

1. Регрессии, нелинейные относительно переменных, но линейные по оцениваемым параметрам.
2. Регрессии, нелинейные по оцениваемых параметрам.

Регрессии, нелинейные относительно объясняющих переменных, всегда сводятся к линейным моделям.

Альтернативные функциональные формы: правила выбора

Правила выбора формы зависимости:

1. ***Исходить из экономической теории.***
2. ***Оценивать формальное качество модели.***
3. ***Дополнительно проверять по нескольким содержательным критериям.***
4. ***Ответить на вопросы, возникающие при анализе модели:***

- каковы признаки качественной модели;
- какие ошибки спецификации встречаются и каковы их последствия;
- как обнаружить ошибку спецификации;
- каким образом можно исправить ошибку спецификации и перейти к более качественной модели.

Линейная форма

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии

β – предельный эффект независимого фактора

$$\beta = Y'_X = \frac{dY}{dX} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

Линейная форма

Для полученных оценок *a*, *b* уравнения регрессии:

$$Y = a + bX$$

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \qquad \Delta X = 1 \qquad \Rightarrow \qquad b = \Delta Y$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} \qquad \Rightarrow \qquad a = \overline{Y}(\overline{X} = 0)$$

Линейная форма

Коэффициент регрессии *b* показывает прирост зависимой переменной при изменении объясняющей переменной на единицу.

Коэффициент регрессии *b* – угловой коэффициент линии регрессии

Коэффициент регрессии *a* – среднее значение зависимой переменной при нулевом значении объясняющей переменной

Линейная форма от времени

$$Y_i = a + bt_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии от времени – ежегодный (ежемесячный и т.д.) прирост зависимой переменной

$$b = \frac{\Delta Y}{\Delta t}$$

Линейные зависимости

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_m X_m + \varepsilon$$

Интерпретация коэффициентов регрессии: предельные эффекты факторов (при постоянстве прочих факторов)

$$\beta_k = \frac{dY}{dX_k} \approx \frac{\Delta Y}{\Delta X_k}$$

Вычисление эластичностей

$$L(Y, X_k) = \frac{dY / dX_k}{Y / X_k} = \frac{dY}{dX_k} \cdot \frac{X_k}{Y} = \beta_k \frac{X_k}{Y}$$

Анализ эластичностей – мощное средство анализа зависимостей

Моделирование эластичности

Независимо от вида математической связи между *Y* и *X* ***эластичность*** равна:

$$L = \frac{dY/Y}{dX/X} = \frac{dY/dX}{Y/X} \approx \frac{\Delta Y/Y}{\Delta X/X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

Эластичность *y* по *x* рассчитывается как относительное изменение *y* на единицу относительного изменения *x*.

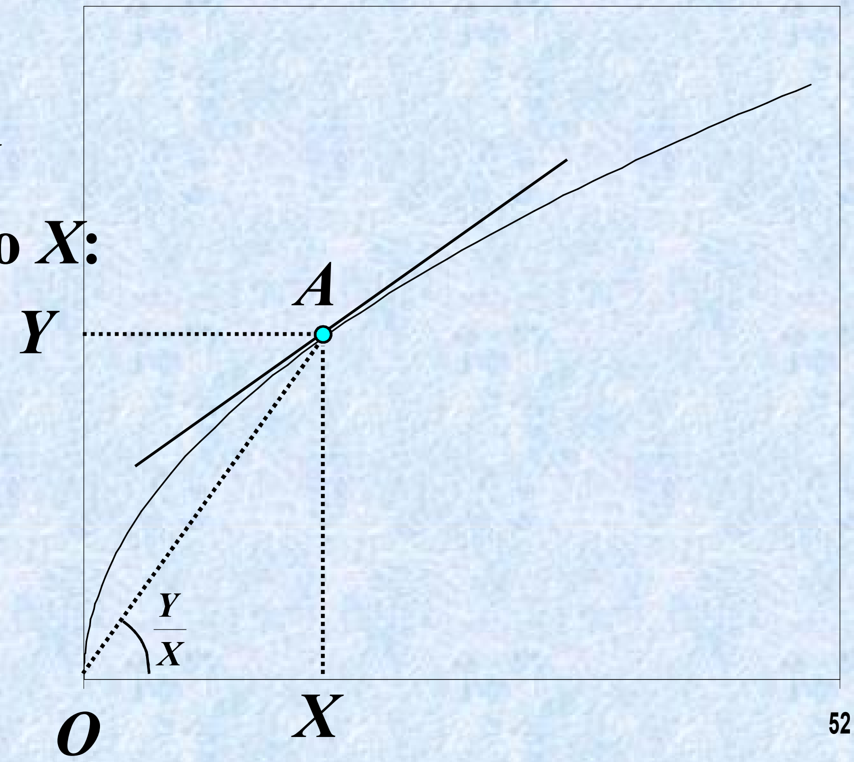
Вычисление эластичностей

Эластичность Y по X – это отношение относительного изменения Y к относительному изменению X:

$$\text{elasticity} = \frac{dY/Y}{dX/X}$$

$$= \frac{dY/dX}{Y/X}$$

$$= \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$



elasticity < 1

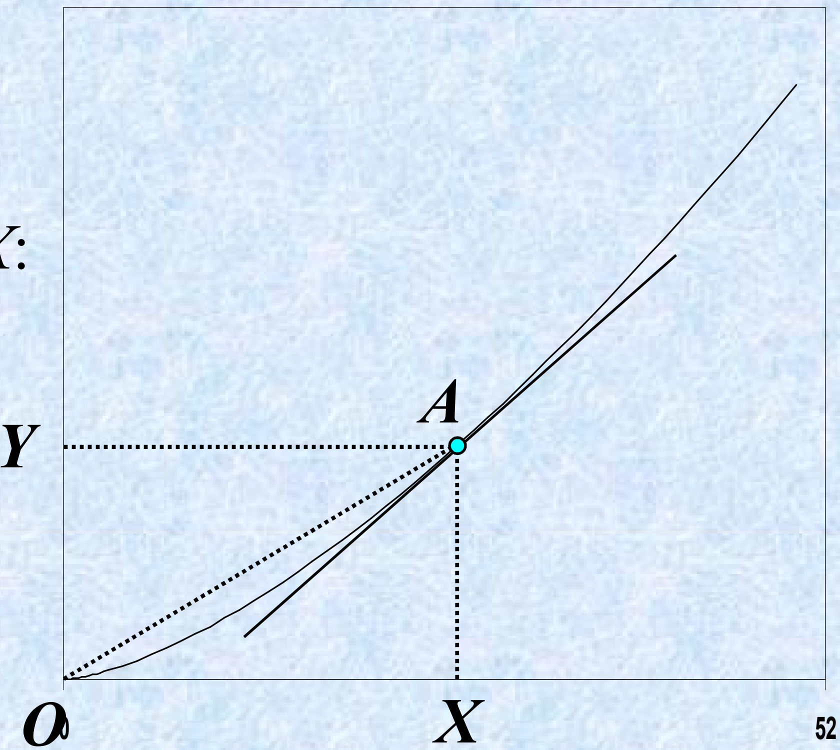
Вычисление эластичностей

Эластичность Y по X – это отношение относительного изменения Y к относительному изменению X:

$$\text{elasticity} = \frac{dY/Y}{dX/X}$$

$$= \frac{dY/dX}{Y/X}$$

$$= \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$



$$\text{elasticity} > 1$$

Пример расчета эластичности

Рассмотрим кривую Энгеля: $Y = \alpha X^{\beta}$

где *Y* – спрос на товар, *X* – доход. Имеем:

Эластичность = $\dfrac{dY/dX}{Y/X} = \dfrac{\alpha\beta X^{\beta-1}}{\alpha X^{\beta-1}} = \beta,$

Например для модели $Y = 0{,}01X^{0,3}$ эластичность спроса по доходу равна 0,3. Иными словами, изменение дохода (*X*) на 1% вызывает изменение спроса (*Y*) на 0,3%

Эластичность – переменная величина

Эластичность не всегда бывает постоянной для различных значений X и Y

Например, для линейной модели

$$L = \frac{dY / dX}{Y / X} = \frac{\beta}{Y / X} = \beta \frac{X}{Y}$$

Эластичность в линейной модели

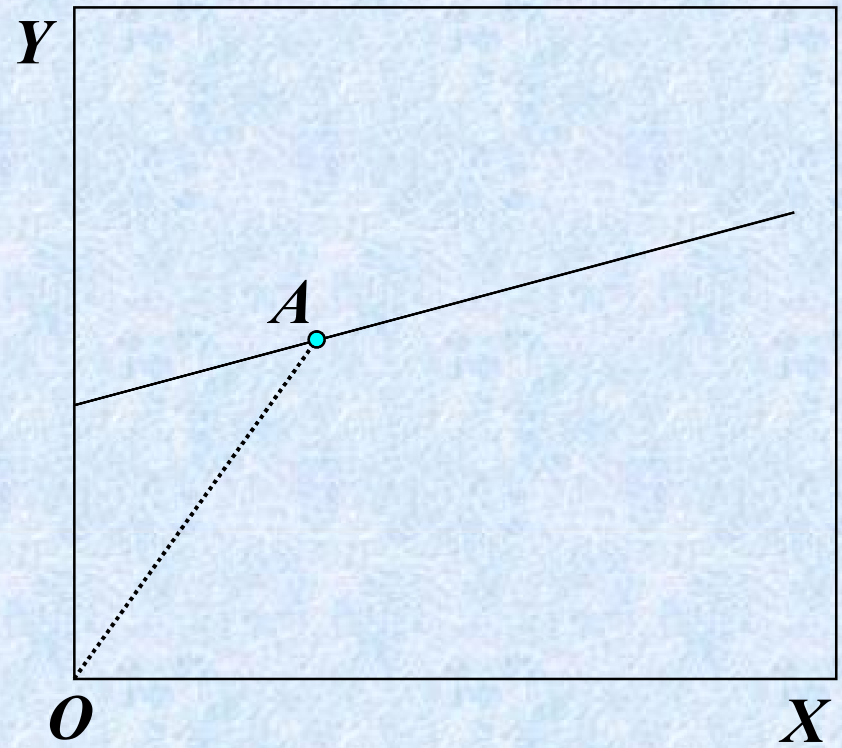
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X$$

$$\text{elasticity} = \frac{dY/dX}{Y/X}$$

$$= \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2 X)/X}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 / X) + \beta_2}$$



Эластичность в линейной модели

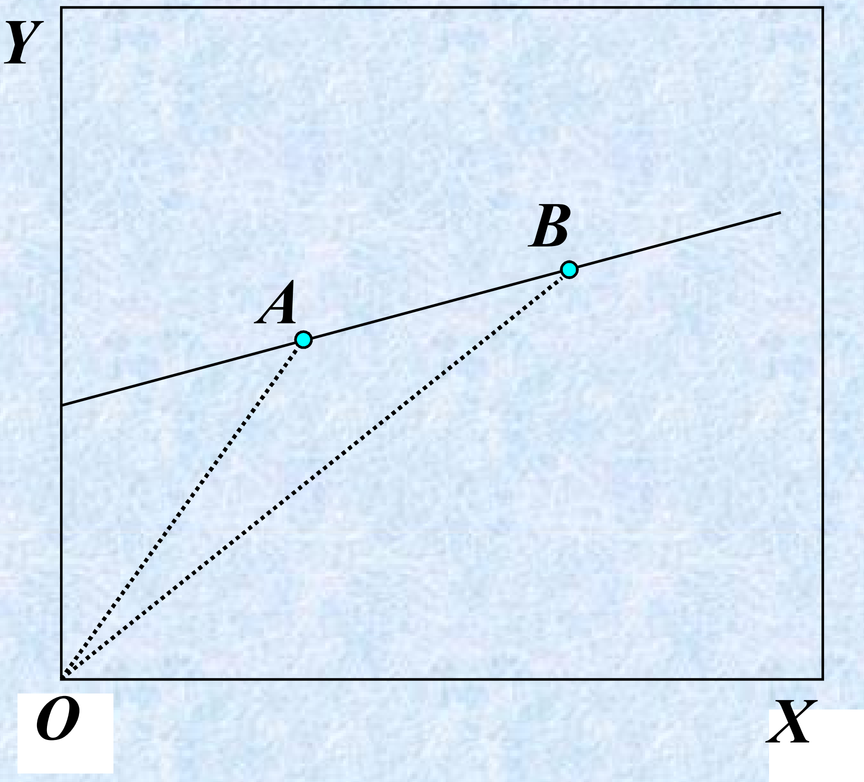
$$Y = \beta_1 + \beta_2 X$$

$$\text{elasticity} = \frac{dY/dX}{Y/X}$$

$$= \frac{\text{slope of the tangent at } A}{\text{slope of } OA}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1 + \beta_2 X)/X}$$

$$= \frac{\beta_2}{(\beta_1/X) + \beta_2}$$



Эластичность в разных точках- различна

Средний коэффициент эластичности

Средний коэффициент эластичности $\overline{L}$ показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат *Y* от своей средней величины при изменении фактора *X* на 1% от своего среднего значения

$$\overline{L} = f'(\overline{X}) \frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$$

Расчет эластичности для линейной регрессии

Средние коэффициенты эластичности:

$$\overline{El}_{YX_j} = b_j \frac{\bar{X}_j}{\bar{Y}}$$

Частные коэффициенты эластичности:

$$El_{Y_{X_j}} = b_j \frac{X_j}{\hat{Y}_{X_j|X_1,X_2,\ldots X_{j-1},X_{j+1},\ldots,X_M}}$$

Логарифмическая форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии β – эластичность зависимой переменной по объясняющей переменной

$$\frac{dY}{Y} = \beta \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY / Y}{dX / X}$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает, на сколько процентов возрастает Y при возрастании X на 1%.

Логарифмическую форму следует использовать там, где есть основание предполагать постоянство эластичности

Логарифмическая форма

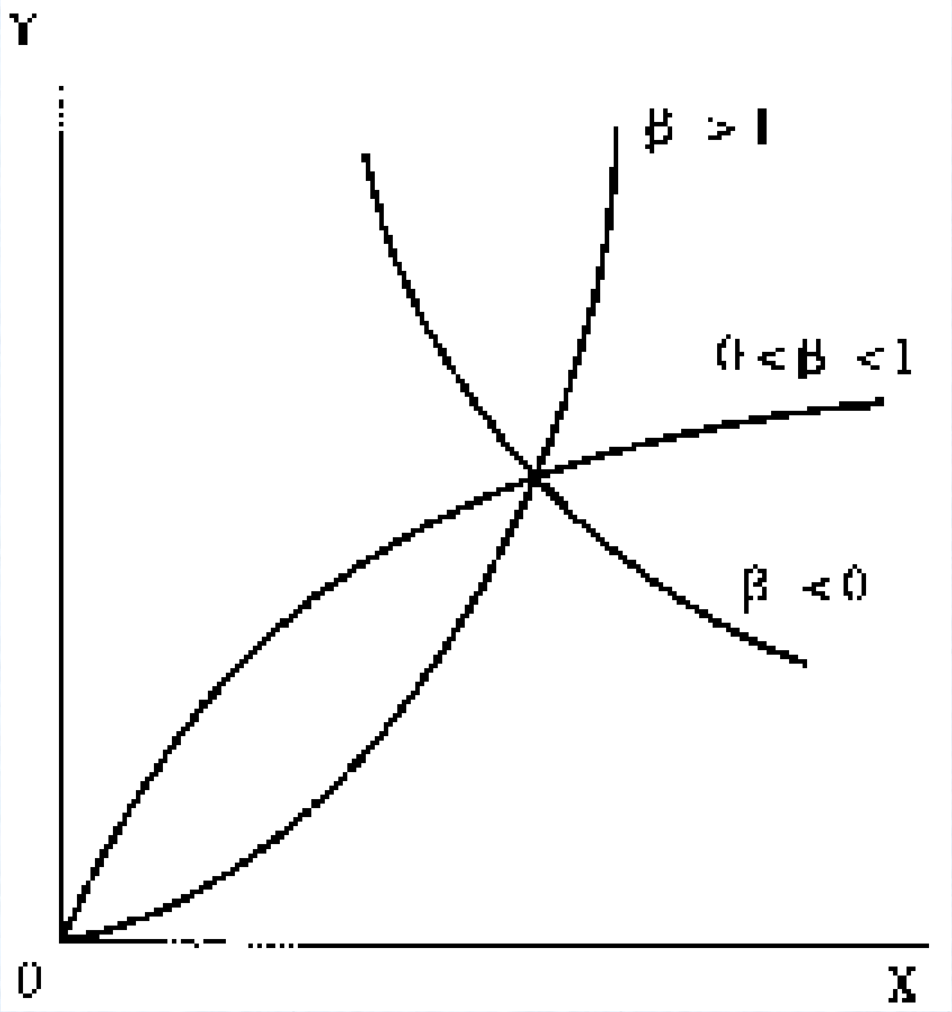
$$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

Вычисление наклона (скорости роста)

$$\frac{dY}{dX} = \beta \frac{Y}{X}$$

Наклон постоянно меняется с изменением номера наблюдения

Графики логарифмической формы зависимости



Логарифмические зависимости

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 \ln X_2 + \ldots + \beta_m \ln X_m + \varepsilon$$

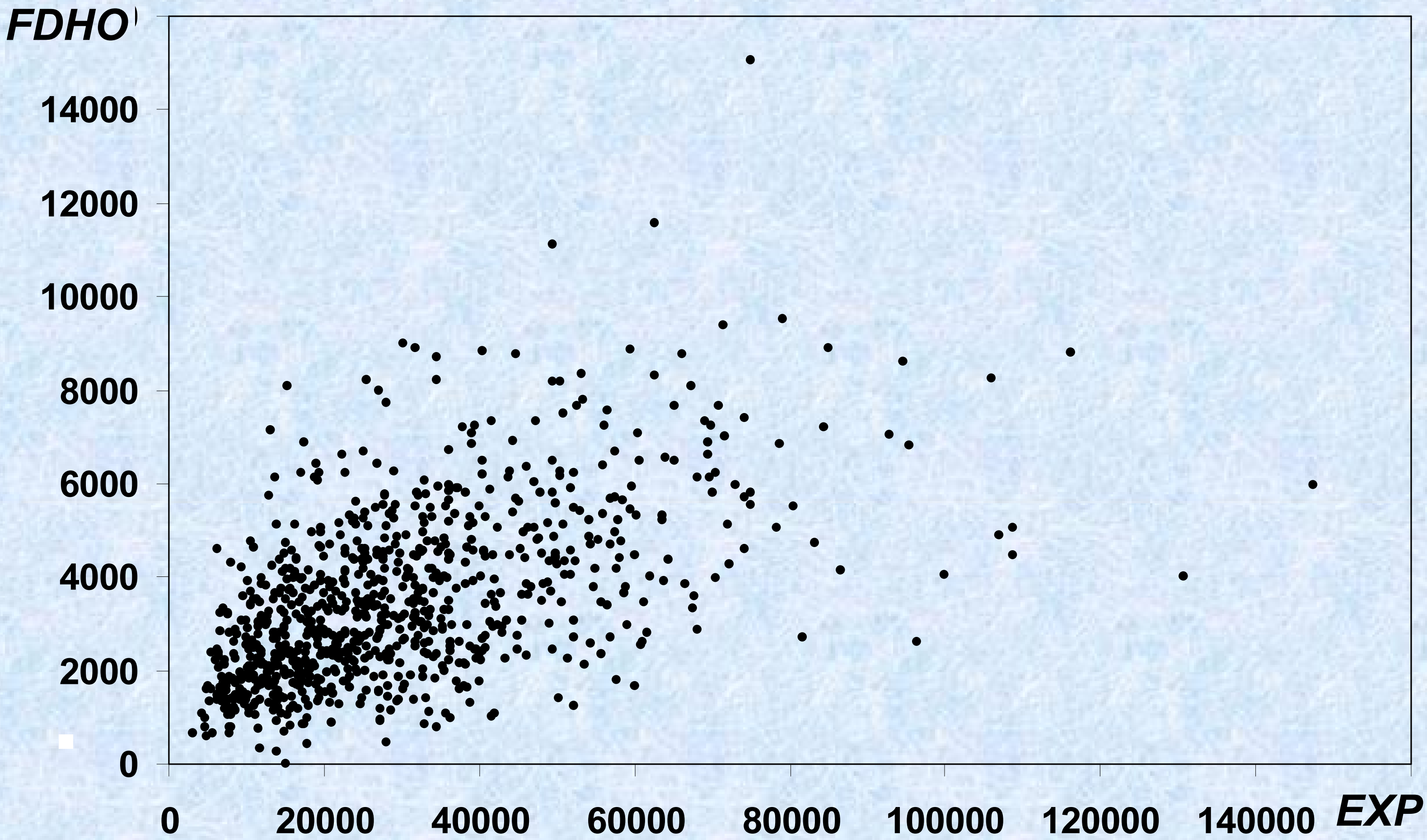
Интерпретация коэффициентов регрессии:
Коэффициенты являются факторными эластичностями

$$L(Y, X_k) = \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln X_k} \approx \frac{\Delta Y}{\Delta X_k} \cdot \frac{X_k}{Y} = \beta_k$$

При логарифмической зависимости предельный эффект- переменный

$$\text{Наклон}(Y, X_k) = \frac{dY}{dX_k} = \left(\frac{dY}{dX_k} \cdot \frac{X_k}{Y} \right) \cdot \frac{Y}{X_k} = \beta_k \frac{Y}{X_k}$$

Линейная и двойная логарифмическая модель



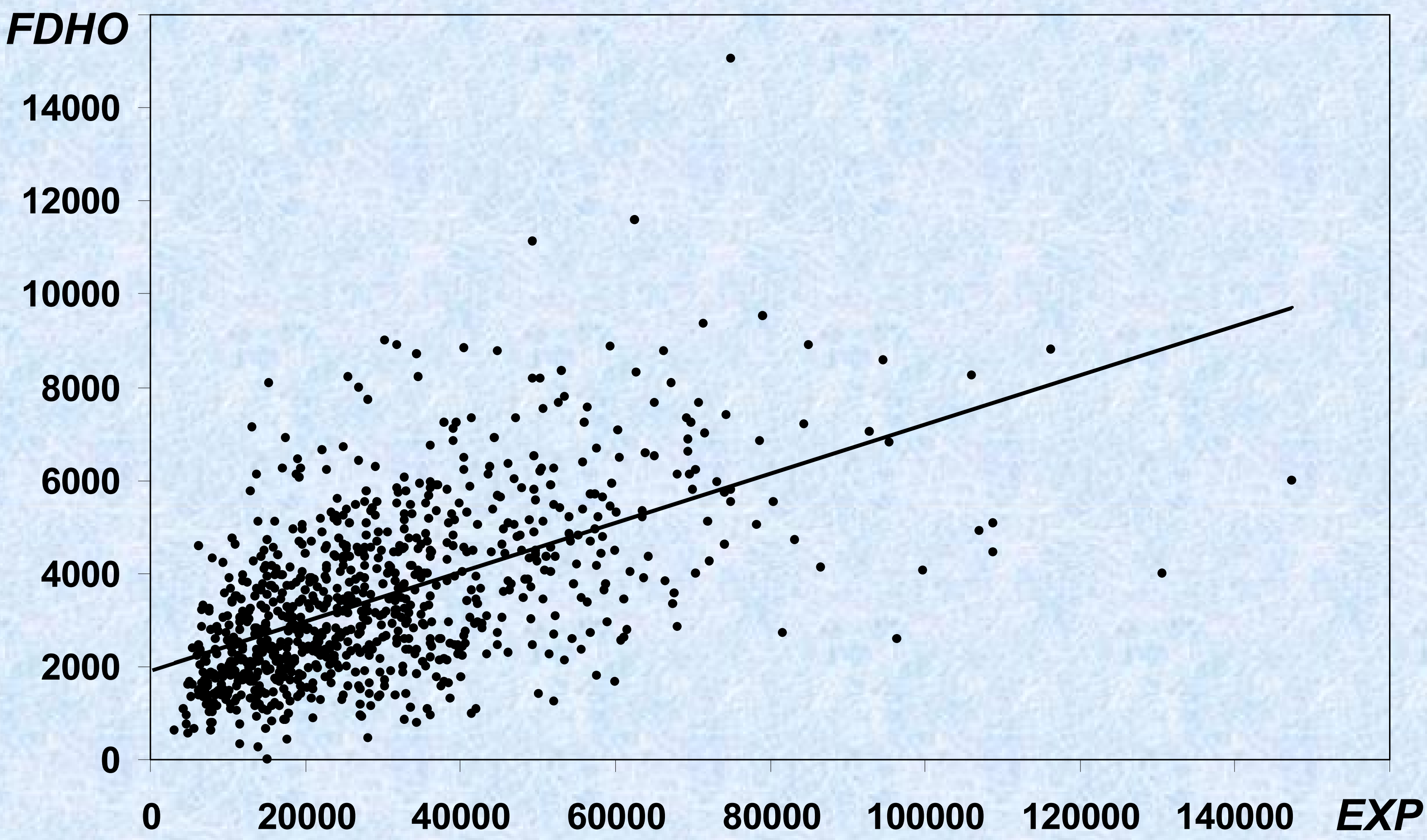
Расходы на продукты питания и общие расходы в 1995 (обе - в долларах) по данным 869 домохозяйств США

Линейная модель

```
. reg FDHO EXP

  Source |       SS       df       MS              Number of obs =     869
---------+------------------------------           F(  1,   867) =  381.47
   Model |   915843574     1   915843574           Prob > F      =  0.0000
Residual |  2.0815e+09   867  2400831.16           R-squared     =  0.3055
---------+------------------------------           Adj R-squared =  0.3047
   Total |  2.9974e+09   868  3453184.55           Root MSE      =  1549.5

------------------------------------------------------------------------------
    FDHO |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
     EXP |   .0528427   .0027055     19.531   0.000       .0475325    .0581529
   _cons |   1916.143   96.54591     19.847   0.000       1726.652    2105.634
------------------------------------------------------------------------------
```

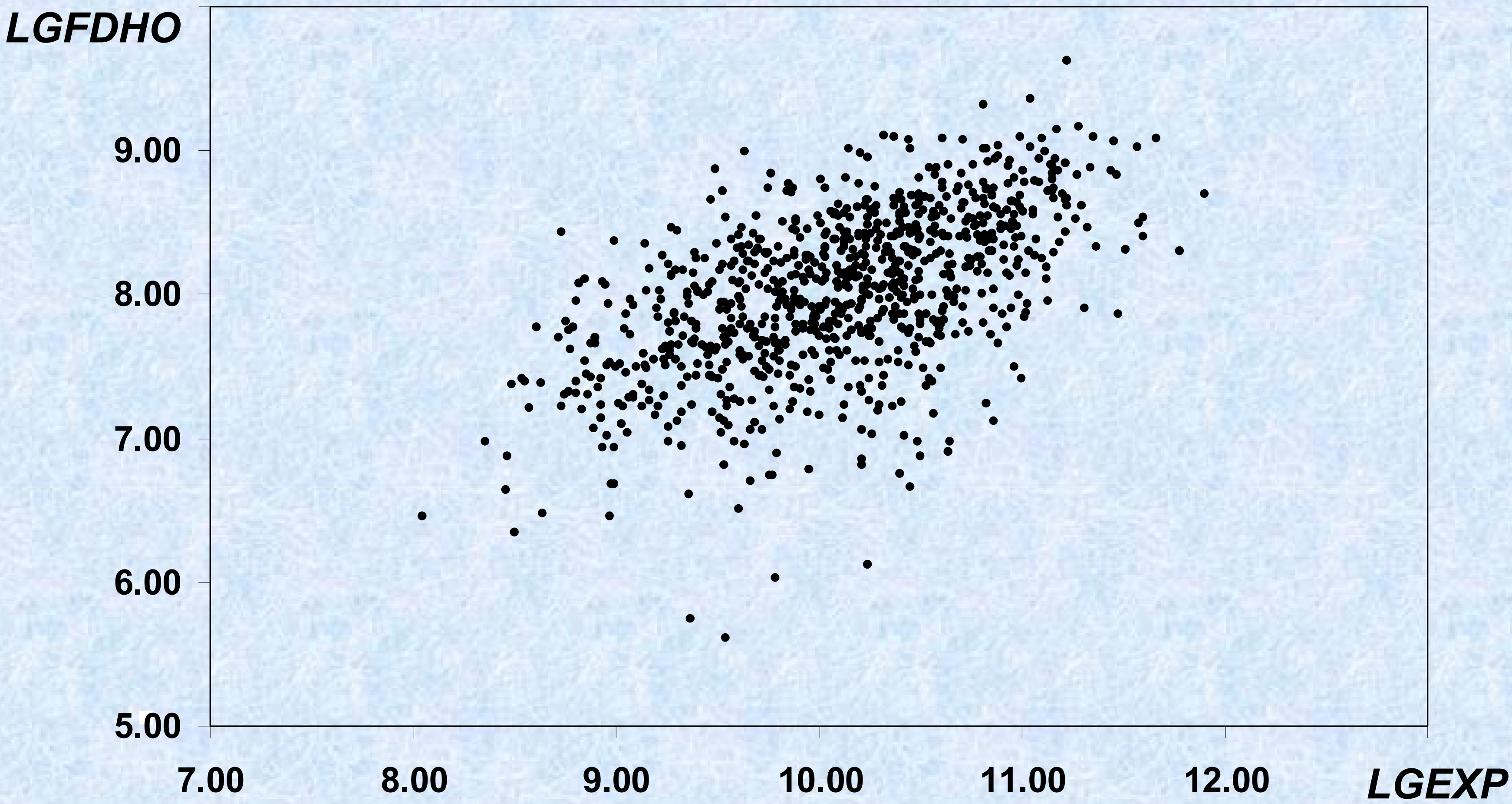
Коэффициенты представляются разумными, хотя предельный эффект несколько занижен, а константа- завышена.

Линейная модель



Несоотвествие коэффициентов хорошо видно на графике

Двойная логарифмическая модель



Между логарифмически преобразованными переменные линейная зависимость кажется более адекватной

Двойная логарифмическая модель

```
. g LGFDHO = ln(FDHO)
. g LGEXP = ln(EXP)

. reg LGFDHO LGEXP

  Source |       SS       df       MS                  Number of obs =     868
---------+------------------------------               F(  1,   866) =  396.06
   Model |  84.4161692     1  84.4161692               Prob > F      =  0.0000
Residual |  184.579612   866  .213140429               R-squared     =  0.3138
---------+------------------------------               Adj R-squared =  0.3130
   Total |  268.995781   867  .310260416               Root MSE      =  .46167

------------------------------------------------------------------------------
  LGFDHO |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
   LGEXP |   .4800417   .0241212     19.901   0.000       .4326988    .5273846
   _cons |   3.166271    .244297     12.961   0.000       2.686787    3.645754
------------------------------------------------------------------------------
```

Модель высокозначима. Коэффициент эластичности расходов на товары питания по совокупным расходам (прокси для совокупных доходов) положителен и меньше единицы, как и полагается для нормального товара первой необходимости

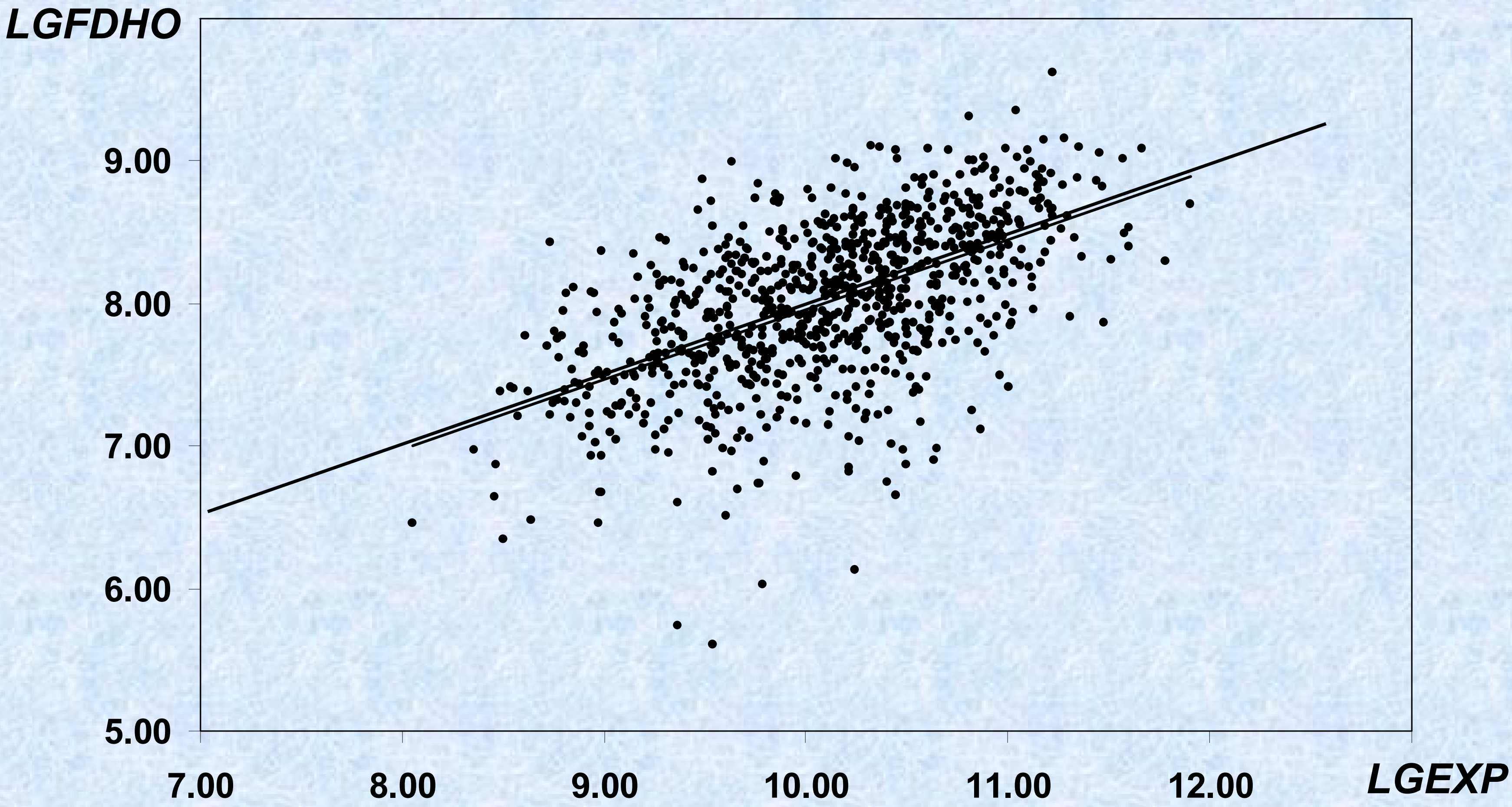
Двойная логарифмическая модель

```
. g LGFDHO = ln(FDHO)
. g LGEXP = ln(EXP)

. reg LGFDHO LGEXP

  Source |       SS       df       MS                  Number of obs =     868
---------+------------------------------               F(  1,   866) =  396.06
   Model |  84.4161692     1  84.4161692               Prob > F      =  0.0000
Residual |  184.579612   866  .213140429               R-squared     =  0.3138
---------+------------------------------               Adj R-squared =  0.3130
   Total |  268.995781   867  .310260416               Root MSE      =  .46167

------------------------------------------------------------------------------
  LGFDHO |      Coef.   Std. Err.       t     P>|t|       [95% Conf. Interval]
---------+--------------------------------------------------------------------
   LGEXP |   .4800417   .0241212     19.901   0.000       .4326988    .5273846
   _cons |   3.166271    .244297     12.961   0.000       2.686787    3.645754
------------------------------------------------------------------------------
```

$$LGFDHO = 3.17 + 0.48 LGEXP \quad \Rightarrow \quad FDHO = 23.8 EXP^{0.48}$$

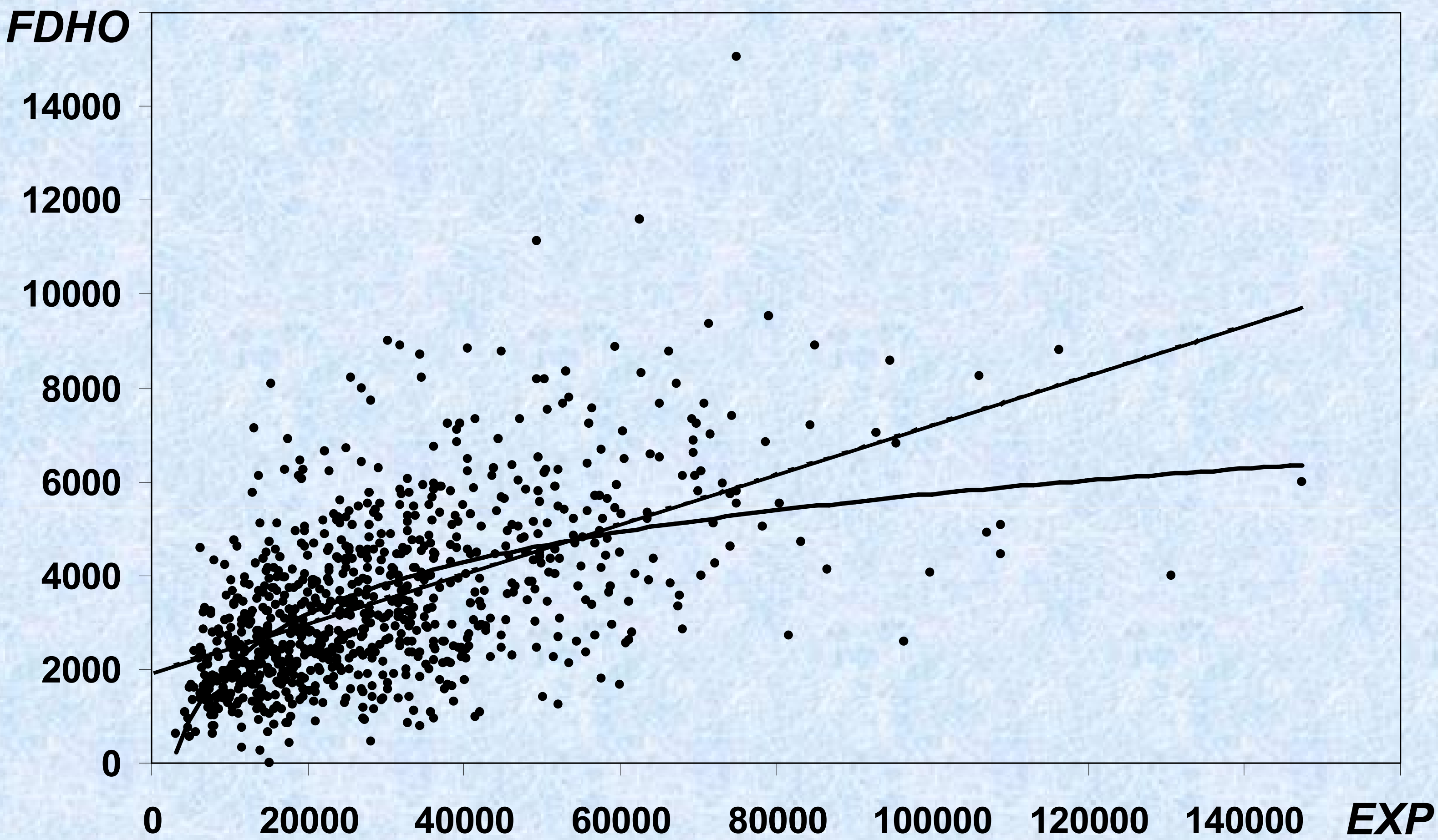
Константа не имеет хорошей интерпретации. Преобразовав β_1, получим $e^{3.16}$ =23.8, то есть просто некий масштабный множитель

Двойная логарифмическая модель



Скаттер-диаграмма показывает хорошую подгонку.

Линейная и двойная логарифмическая модель



Сопоставление линейной и двойной логарифмической регрессии на исходном графике четко делает выбор в пользу последней. Хотя различие не кажется особенно сильным, но двойная логарифмическая модель лучше объясняет данные при малых значениях *EXP, более обоснована с теоретической точки зрения (постоянная эластичность) и гетероскедастичность меньше выражена*

Полулогарифмические формы

1. Линейно-логарифмическая форма (логарифм при объясняющей переменной)

2. Логарифмически-линейная форма (логарифм при зависимой переменной)

Линейно-логарифмическая форма

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \ln X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

Интерпретация коэффициента регрессии β:

$$dY = \beta \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY}{dX / X} \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{100} = \frac{dY}{100 \cdot (dX / X)}$$

Коэффициент при объясняющей переменной показываетна сколько единиц возрастает *Y* при возрастании *X* на 1%

При интерпретации коэффициент следует делить на 100

Если *X* увеличится на 1%, то прирост *Y* составит β/100 единиц (в которых измеряется *Y*)

Линейно-логарифмическая форма

$$Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$$

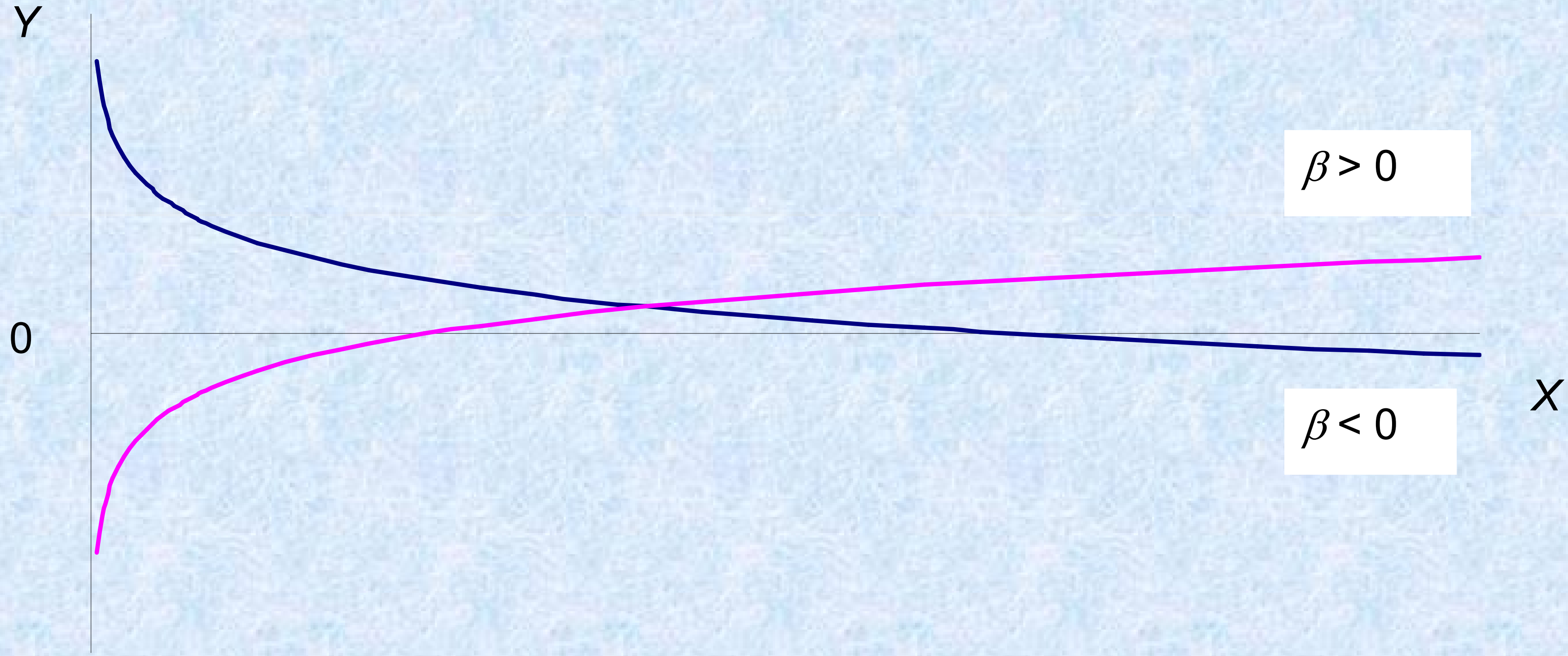
Эластичность убывает с ростом *Y*:

$$dY = \beta \frac{dX}{X} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} = \beta \frac{1}{X} \cdot \frac{X}{Y} = \beta \frac{1}{Y}$$

Это указывает на класс зависимостей, где следует применять линейно-логарифмическую форму регрессии

Логарифм при *X* снижает влияние роста *X* (*степень влияния X снижается с ростом X*). Моделирование эффектов насыщения на уровне скорости роста: «возрастание с убывающей скоростью»

Графики линейно-логарифмической формы зависимости



Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Интерпретация коэффициента регрессии β:

$$\frac{dY}{Y} = \beta dX \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{dY}{YdX} \quad \overset{dX=1}{\Rightarrow} \quad \beta \cdot 100\% = \frac{dY}{Y} \cdot 100\%$$

Коэффициент при объясняющей переменной показывает на сколько процентов возрастает *Y* при возрастании *X* на одну единицу

При интерпретации коэффициент следует умножать на 100

Логарифмически-линейная форма

$$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

Эластичность растет с ростом *Y*:

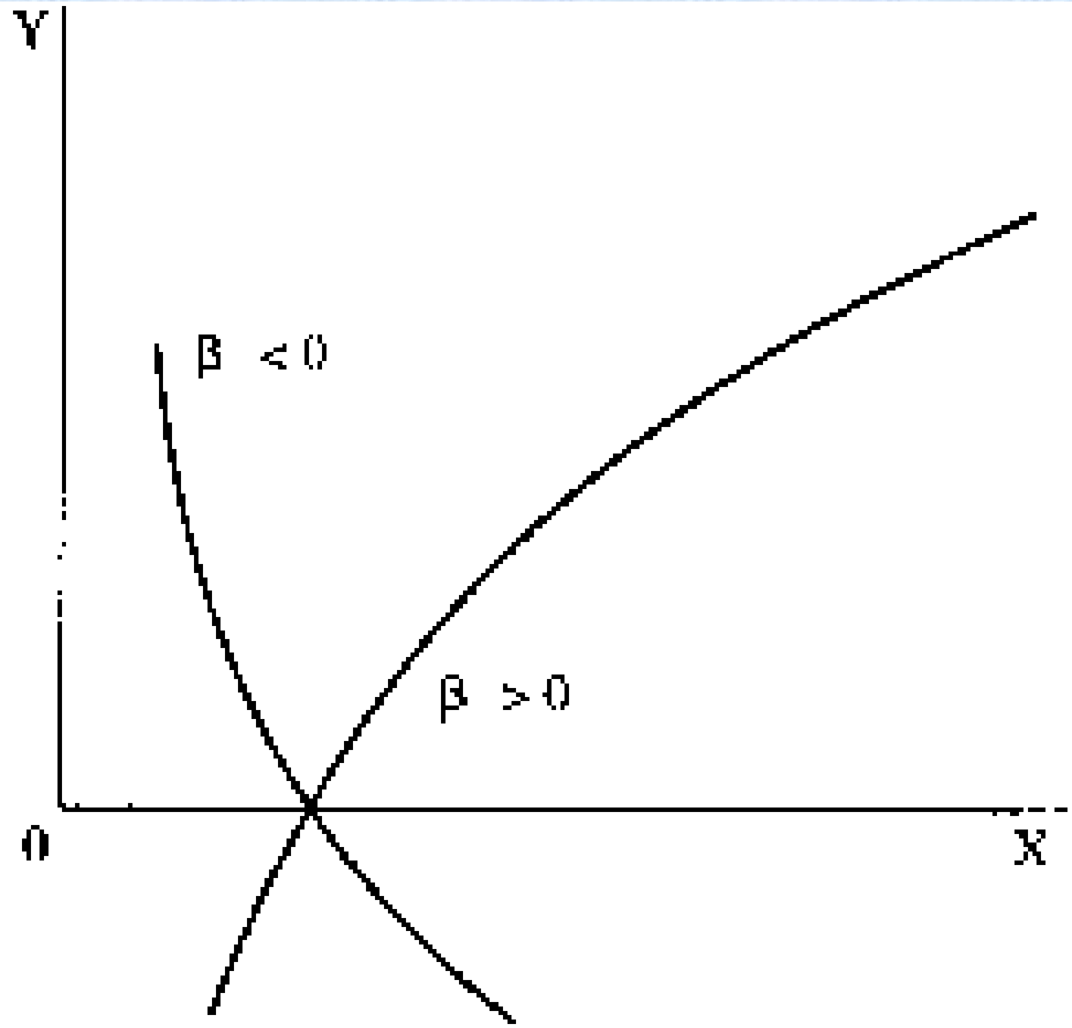
$$dY = \beta dX \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \beta Y \Rightarrow L = \frac{dY}{dX} \cdot \frac{X}{Y} = \beta \frac{YX}{Y} = \beta X$$

Это указывает на класс зависимостей, где следует применять линейно-логарифмическую форму регрессии

Моделирование эффектов насыщения на уровне скорости роста: «возрастание с возрастающей скоростью»

Примеры: кривые Энгеля для товаров роскоши, моделирование оплаты труда (процентная надбавка за стаж и опыт)

Графики логарифмически-линейной формы зависимости



Логарифмически-линейная форма от времени

$$\ln Y_i = \alpha + \beta t_i + \varepsilon_i$$

Вид уравнения: $Y_i = e^{\alpha} e^{\beta t_i} e^{\varepsilon_i}$

Интерпретация: $\dfrac{dY}{Y} = \beta t$

Коэффициент при переменной времени выражает темп прироста. Он показывает на сколько процентов (если умножить его на 100) возрастает *Y* ежегодно

Эту функциональную форму удобно использовать для моделирования процессов экономического роста

Обратные зависимости

$$Y_i = \alpha + \beta \frac{1}{X_i} + \varepsilon_i$$

Вычисление эластичности

$$L = \frac{dY / Y}{dX / X} = \beta \cdot \left(-\frac{1}{XY} \right)$$

С ростом X зависимая переменная приближается к некоторому числу (моделирование эффекта насыщения)

Пример: Моделирование потребления товаров первой необходимости (быстрое достижение насыщения)

Сводка результатов для альтернативных функциональных форм в парной регрессии

Функциональная форма	Уравнение (без учета других факторов)	Наклон $\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$	Эластичность $\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}\cdot\dfrac{X}{Y}$
Линейная	$Y_i = \alpha + \beta X_i + u$	β	$\beta\left(\dfrac{X_i}{Y_i}\right)$
Двойная логарифмическая	$\ln Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + u$	$\beta\left(\dfrac{Y_i}{X_i}\right)$	β
Линейно-логарифмическая (lnX)	$Y_i = \alpha + \beta \ln X_i + u$	$\beta\left(\dfrac{1}{X_i}\right)$	$\beta\left(\dfrac{1}{Y_i}\right)$
Логарифмически-линейная (ln Y)	$\ln Y_i = \alpha + \beta X_i + u$	βY_i	βX_i
Обратная	$Y_i = \alpha + \beta \dfrac{1}{X_i} + u$	$-\beta\left(\dfrac{1}{X_i^2}\right)$	$-\beta\left(\dfrac{1}{X_i Y_i}\right)$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

Вид уравнения регрессии	Постоянство отношения приращения	Функциональная сетка, выпрямляющая график	Система уравнений для определения параметров по МНК
1	2	3	4
$\hat{y} = kx + b$	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = const$	-	$\begin{cases} bn + k\sum x_i = \sum y_i \\ b\sum x_i + k\sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = ax^2 + bx + c$	$\dfrac{\Delta^2 y}{\Delta^2 x} = const$	-	$\begin{cases} cn + b\sum x_i + a\sum x_i^2 = \sum y_i \\ c\sum x_i + b\sum x_i^2 + a\sum x_i^3 = \sum y_i x_i \\ c\sum x_i^2 + b\sum x_i^3 + a\sum x_i^4 = \sum y_i x_i^2 \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = \frac{k}{x} + b$	$\frac{\Delta y}{\Delta \frac{1}{x}} = const$	$u = \frac{1}{x}$, $v = y$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = ke^{-x} + b$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta e^{-x}} = const$	$u = e^{-x}$, $v = y$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = k \ln x + b$	$\dfrac{\Delta y}{\Delta \ln x} = const$	$u = \ln x$, $v = y$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = \dfrac{1}{\dfrac{k}{x} + b}$	$\dfrac{\Delta \dfrac{1}{y}}{\Delta \dfrac{1}{x}} = const$	$u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{y}$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = \dfrac{1}{ke^{-x} + b}$	$\dfrac{\Delta \frac{1}{y}}{\Delta e^{-x}} = const$	$u = e^{-x}$, $v = \dfrac{1}{y}$	$\begin{cases} bn + k\sum u_i = \sum v_i \\ b\sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = bx^k$	$\dfrac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = const$	$u = \ln x,$ $v = \ln y$	$\begin{cases} \ln b \cdot n + k\sum u_i = \sum v_i \\ \ln b \cdot \sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = be^{kx}$	$\dfrac{\Delta \ln y}{\Delta x} = const$	$u = x,$ $v = \ln y$	$\begin{cases} \ln b \cdot n + k\sum u_i = \sum v_i \\ \ln b \cdot \sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Сводка линеаризующих преобразований для основных зависимостей в экономике

1	2	3	4
$\hat{y} = be^{\frac{k}{x}}$	$\dfrac{\Delta \ln y}{\Delta \dfrac{1}{x}} = const$	$u = \dfrac{1}{x}$, $v = \ln y$	$\begin{cases} \ln b \cdot n + k\sum u_i = \sum v_i \\ \ln b \cdot \sum u_i + k\sum u_i^2 = \sum u_i v_i \end{cases}$

Преобразование случайного отклонения

МНК применяется к преобразованным (линеаризованным) уравнениям. Поэтому необходимо особое внимание уделять рассмотрению свойств случайных отклонений – выполнимости предпосылок теоремы Гаусса-Маркова.

<u>Пример</u>.

$$Y = \alpha X^{\beta} + \varepsilon \quad \overset{\ln(\cdot)}{\Longrightarrow} \quad \ln Y = \ln(\alpha X^{\beta} + \varepsilon)$$

Логарифмирование нелинейной модели с аддитивным случайным членом не приводит к линеаризации соотношения относительно параметров.

Случайный член в модели, требующей преобразования

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2}$$

$$\log Y = \log \beta_1 + \beta_2 \log X$$

Как должен входить случайный фактор в исходную модель, чтобы быть линейным в преобразованной модели?

Случайный член в модели, требующей преобразования

$$Y = \beta_1 X^{\beta_2} e^{u} = \beta_1 X^{\beta_2} v$$

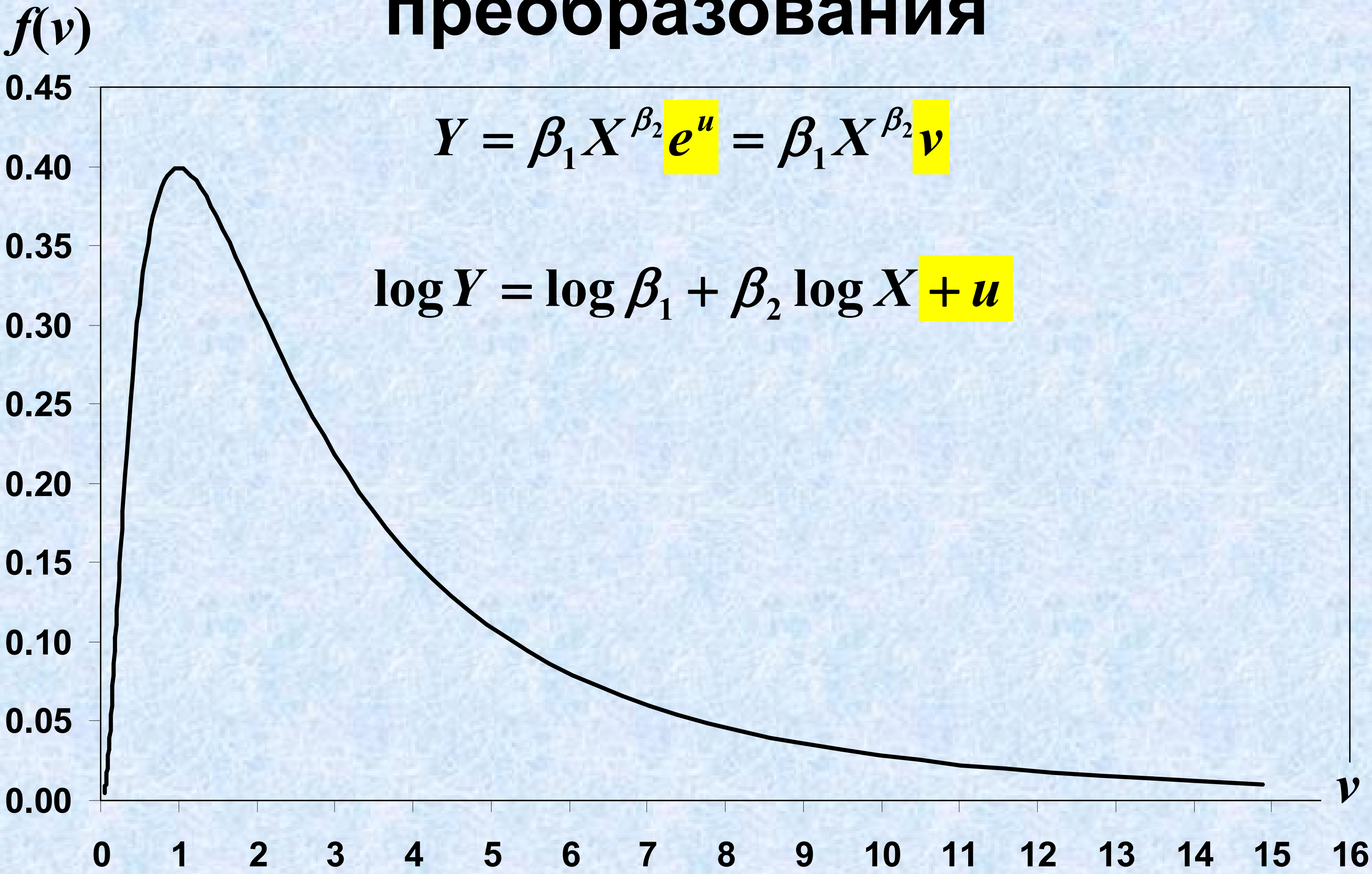
$$\log Y = \log \beta_1 + \beta_2 \log X + u$$

В исходной модели случайный фактор входит мультипликативно

Случайный член в модели, требующей преобразования

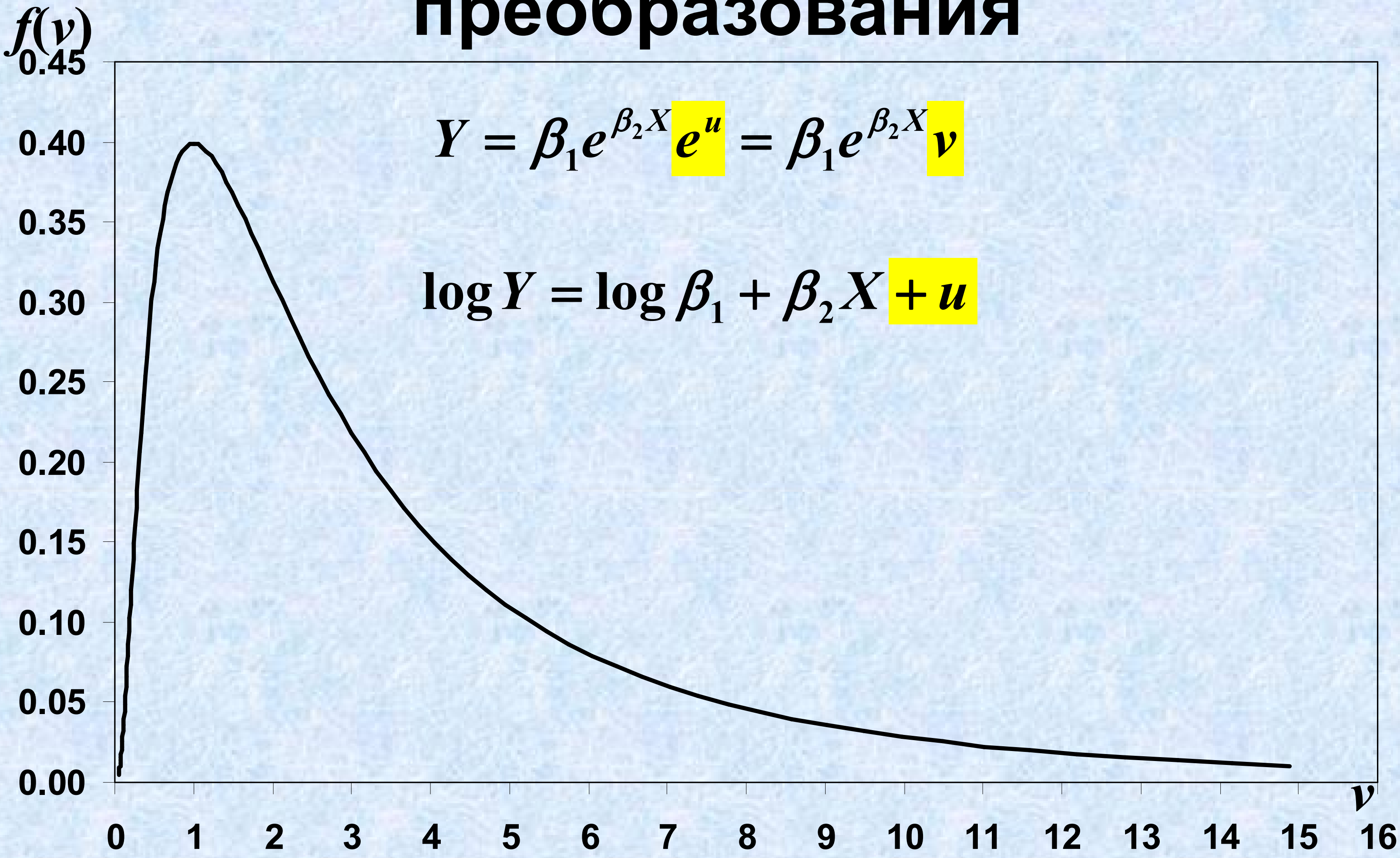
$$Y = \beta_1 X^{\beta_2} e^{u} = \beta_1 X^{\beta_2} v$$

$$\log Y = \log \beta_1 + \beta_2 \log X + u$$



Чтобы в преобразованной модели ошибки удовлетворяли условию нормальности, необходимо, чтобы в исходной модели случайный фактор имел логарифмически-нормальное распределение

Случайный член в модели, требующей преобразования

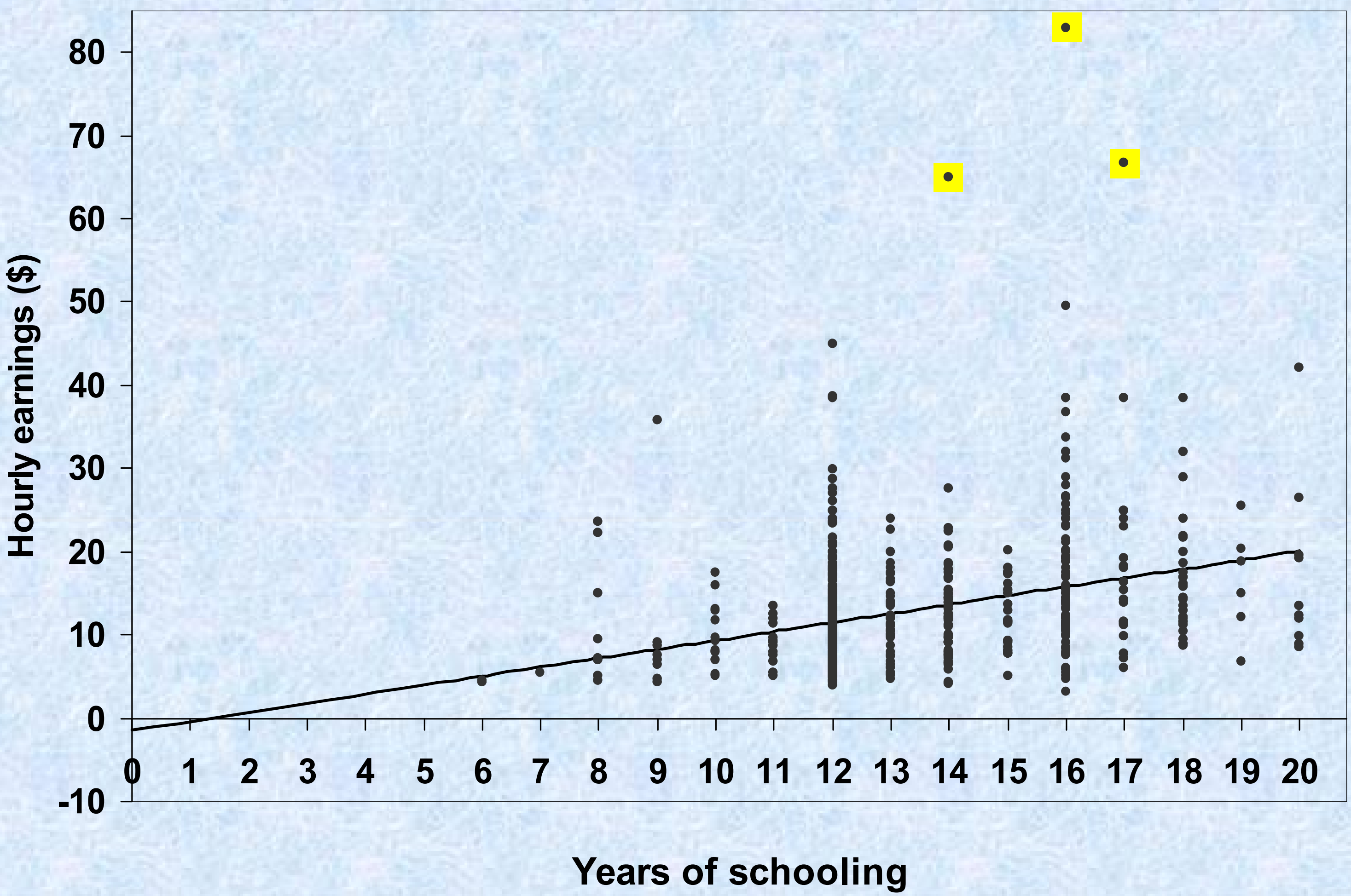


$$Y = \beta_1 e^{\beta_2 X} e^{u} = \beta_1 e^{\beta_2 X} v$$

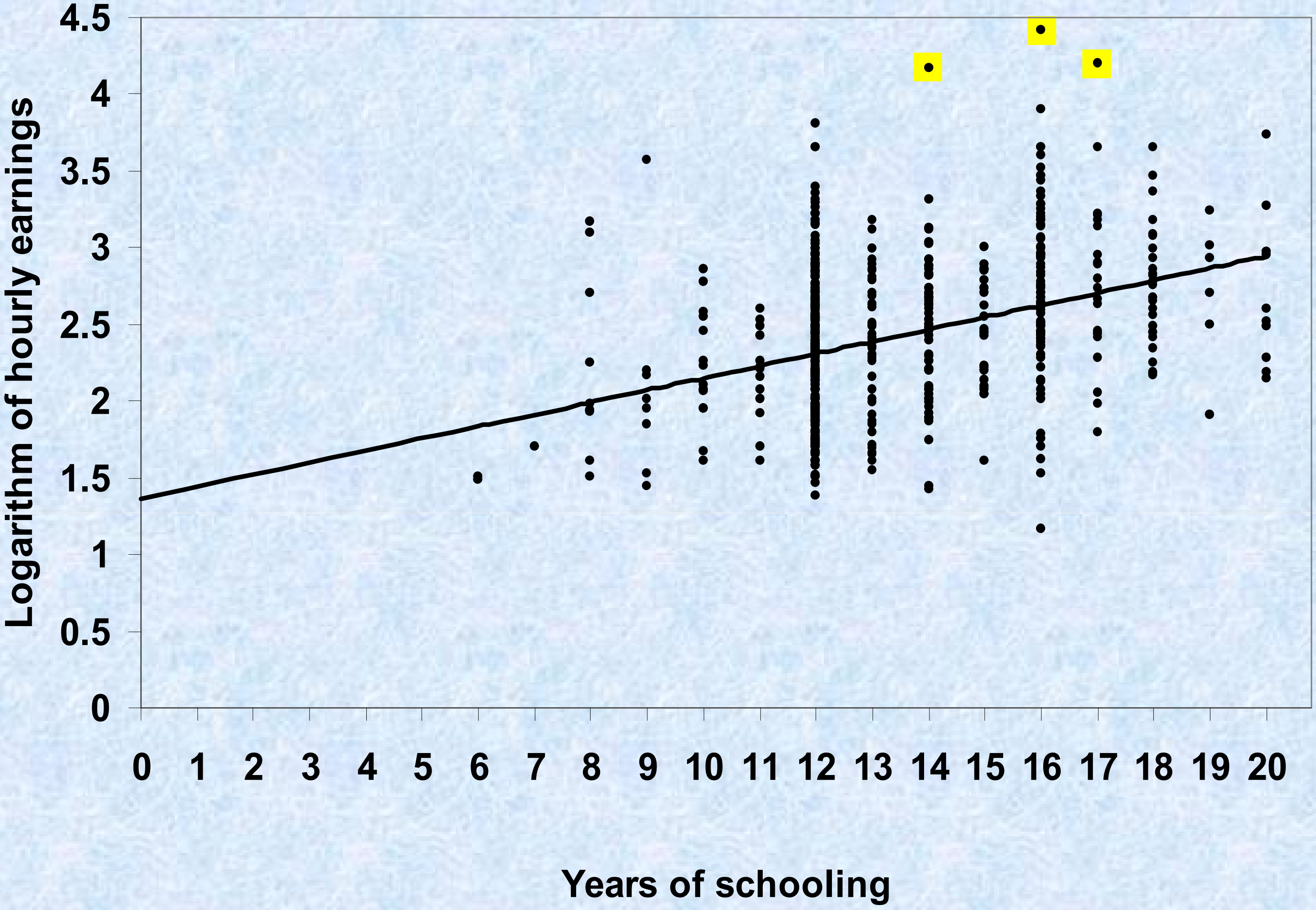
$$\log Y = \log \beta_1 + \beta_2 X + u$$

Аналогично и для логарифмически-линейной модели

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ВЫБРОСЫ

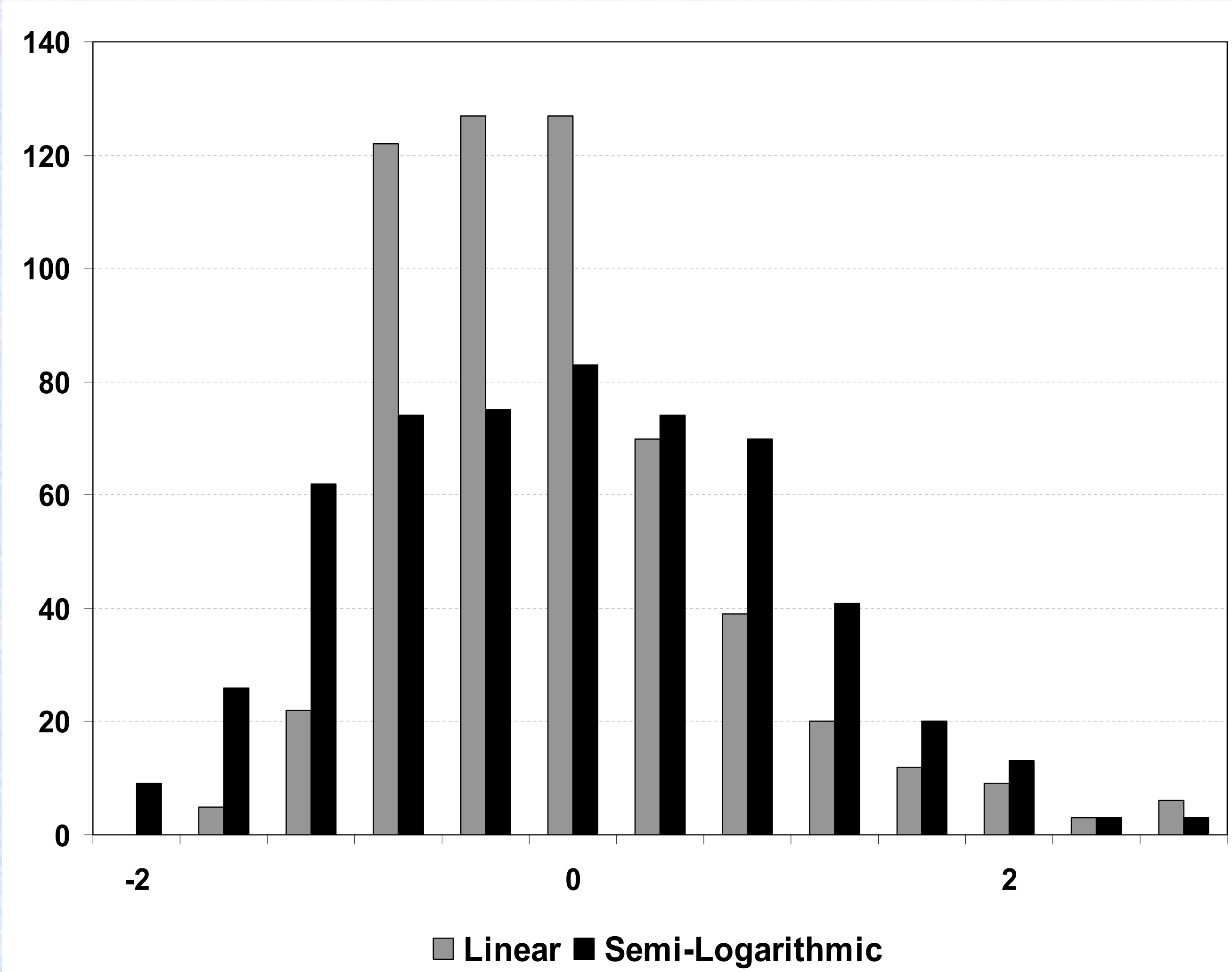


ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ВЫБРОСЫ



В логарифмически-линейной модели выбросы уже не заметны

Распределение остатков в моделях разных функциональных форм



В линейно-логарифмической модели распределение остатков больше похоже на нормальное

Признаки качественной модели

1. ***Простота модели*** (из примерно одинаково отражающих реальность моделей, выбирается та, которая содержит меньше объясняющих переменных.
2. ***Единственность*** (для любых данных коэффициенты модели должны вычисляться однозначно).
3. ***Максимальное соответствие*** (модель тем лучше, чем больше скорректированный коэффициент детерминации).
4. ***Согласованность с теорией*** (уравнение регрессии должно соответствовать теоретическим предпосылкам).
5. ***Прогнозные качества*** (прогнозы, полученные на основе модели, должны подтверждаться реальностью).

Дальнейшие возможности множественной регрессии

1. Многочлены от объясняющих переменных
2. Исследование структуры связи во времени: запаздывающие переменные – лаги
3. Анализ структурных сдвигов

Многочлены от объясняющих переменных

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \varepsilon_i$$

Появляются возможности:

- исследования зависимостей, для которых существенно наличие максимумов и минимумов,

- прямой анализ нелинейных эффектов

Лаговые переменные

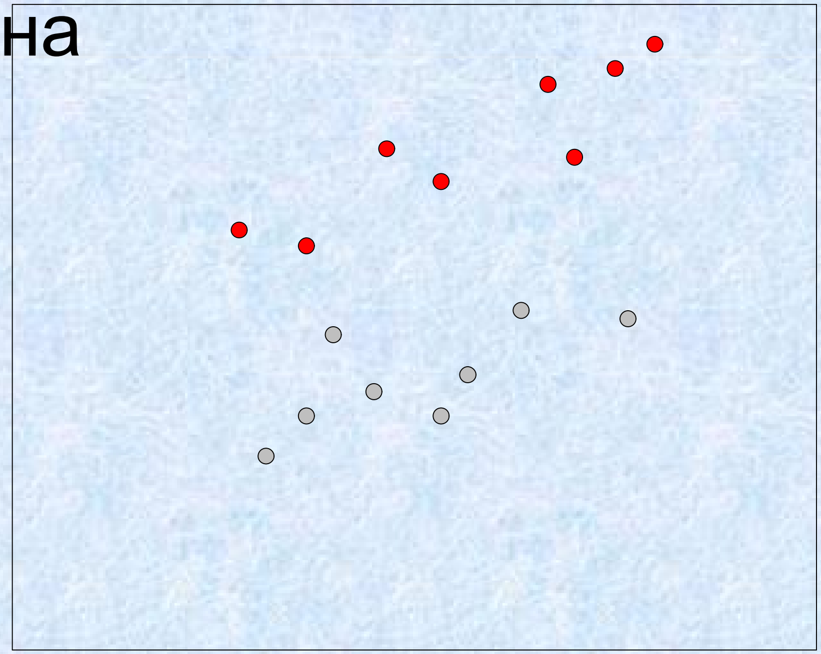
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_{i-1} + \varepsilon_i$$

Учет структуры взаимосвязей во времени

зависимой и объясняющих переменных

Анализ структурных сдвигов

- Тест Чоу на наличие структурного сдвига
- Фиктивные переменные сдвига и наклона



Конец лекции