Обобщенный МНК

лекция 16

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

$Y = X\beta + u \quad (Y = X\beta + \sigma^2 \upsilon)$

Условия Гаусса-Маркова

0. модель правильно специфицирован и линейна по параметрам

1. $E(u_i) = 0$

2. Ошибки независимы и одинаковы распределены

$$\operatorname{cov}\left(u_i; u_j\right) \equiv 0 \ \forall i \neq j; \quad \operatorname{Var}\left(u_i\right) = \sigma^2 \ \forall i$$

$$\operatorname{Var}\left(\mathbf{u}\right) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}$$

3. Регрессоры детерминированы

4. Регрессоры некореллированы с ошибками $\operatorname{COVAR}\left(\mathbf{X}, \mathbf{u}\right)$

5. Ошибки имеют совместное нормальное распределение: $u \sim N(0; I\sigma^2)$

БЕЛЫЙ ШУМ

- Условия 1.-3., наложенные на распределения ошибок описываются только свойствами моментов 1 и 2 порядков (**слабый белый шум**):

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{u}\right)=\mathbf{0};\quad \mathrm{VAR}\left(\mathbf{u}\right)=\sigma^2\mathbf{I}$$

- Условие 5. (требование нормальности)- **белый гауссовский шум**

$$\mathbf{u \sim N(0;\ \sigma^2\ I)}$$

- Условия 1.-4. могут быть заменены на более слабые:

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{X}\right)=\mathbf{0};\quad \mathrm{COVAR}\left(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{X}\right)=\sigma^2\mathbf{I};\quad \mathrm{cov}\left(\mathbf{X};\mathbf{u}\right)=\mathbf{0}$$

Классические условия регрессионного анализа (условия Гаусса-Маркова)

I. Регрессионная модель линейна по параметрам (коэффициентам), корректно специфицирована, и содержит аддитивный случайный член.

II. Случайный член имеет нулевое среднее.

III. Объясняющая переменная не коррелированна со случайным членом.

IV. Наблюдаемые значения случайного члена не коррелированны друг с другом.

V. Случайный член имеет постоянную дисперсию

VI. Случайный член распределен нормально (необязательное, но часто используемое условие).

Классические условия регрессионного анализа

I. Регрессионная модель линейна по параметрам (коэффициентам) и включает константу, корректно специфицирована, и содержит аддитивный случайный член.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

Классические условия регрессионного анализа

II. Случайный член имеет нулевое среднее.

$$E(u_i) = 0$$

Классические условия регрессионного анализа

III. Объясняющая переменная не коррелированна со случайным членом.

$$Cov(X_i, u_i) = 0$$

Классические условия регрессионного анализа

IV. Наблюдаемые значения случайного члена не коррелированны друг с другом.

$$Cov(u_i, u_j) = 0, \quad i \neq j$$

Классические условия регрессионного анализа

V. Случайный член имеет постоянную дисперсию

$$Var(u_i) = Const.$$

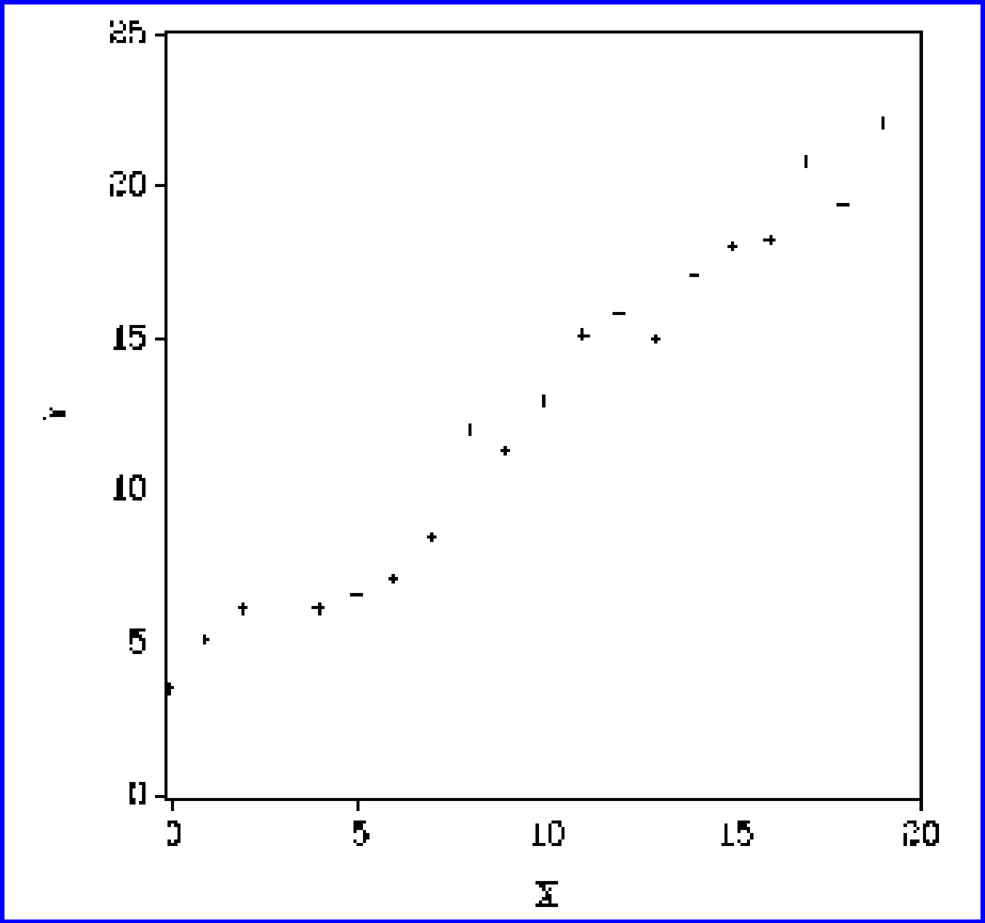
Классические условия регрессионного анализа

VI. Случайный член распределен нормально (необязательное, но часто используемое условие).

$$u_i \sim N(0, \sigma^2)$$

Классические условия регрессионного анализа

Типичная картина выполнения условий Гаусса-Маркова

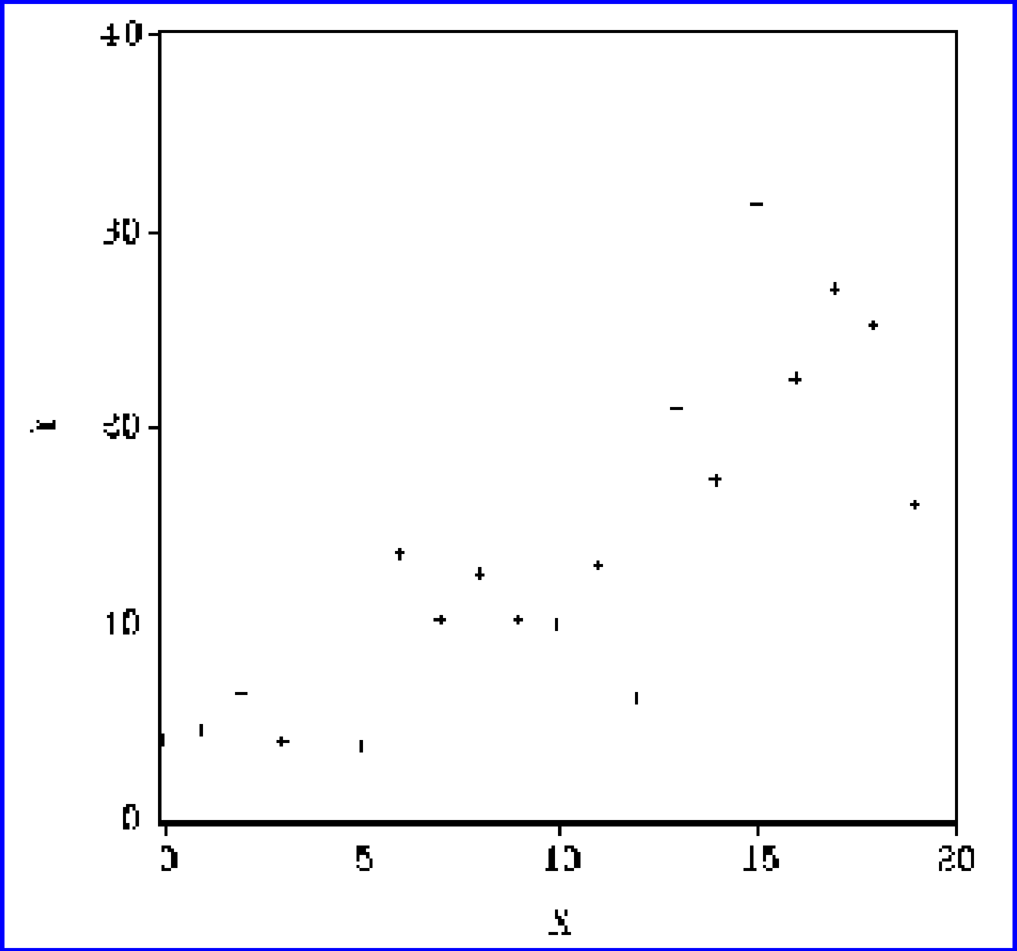


Классические условия регрессионного анализа

Типичная картина нарушения условий

$Var(u_i) = Const.$

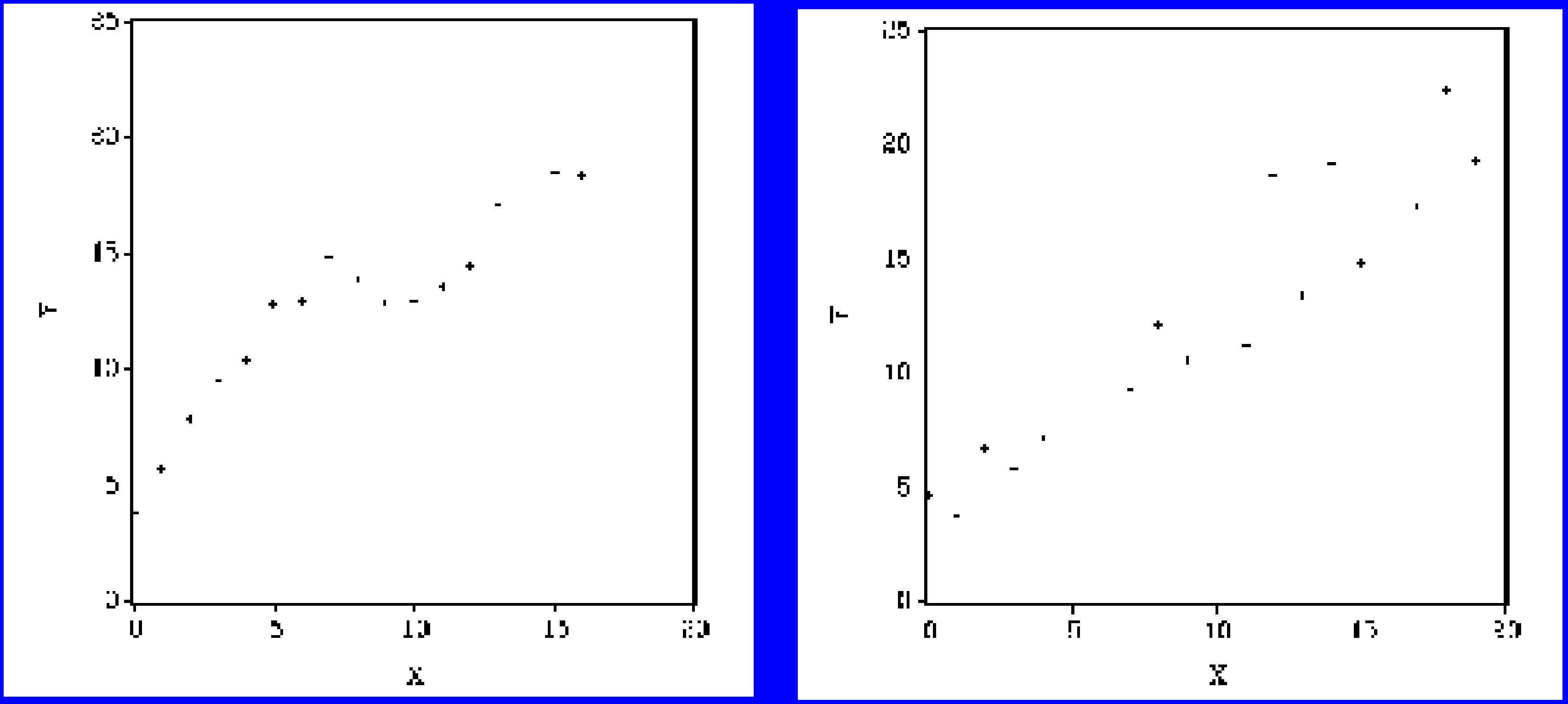
$Cov(X_i, u_i) = 0$



Классические условия регрессионного анализа

Типичные картины нарушения условия

$$Cov(u_i, u_j) = 0, \quad i \neq j$$



СВОЙСТВА ОЦЕНОК КОЭФФИЦИЕНТОВ

$$Y = X\beta + u$$

0. ОЦЕНКА МНК $\boldsymbol{\beta} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$

1. НЕСМЕЩЕННОСТЬ $\mathrm{E}\,\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta};\quad \mathrm{E}\,\mathbf{e} = \mathbf{0}$

2. МАТРИЦЫ КОВАРИАЦИЙ

$$\mathrm{COVAR}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$\mathrm{E}\left(\mathbf{e}\mathbf{e}'\right) = \sigma^2\mathbf{I};\quad \mathrm{E}\left(\mathbf{e}'\mathbf{e}\right) = \left(N-k\right)\sigma^2$$

3. ОЦЕНКА ДИСПЕРСИИ ОШИБОК

$$\widehat{\sigma^2} = s^2 = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{N-k}$$

4. НЕЗАВИСИМОСТЬ $\mathrm{cov}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}};\mathbf{e}\right) = \mathbf{0}$

5. ОЦЕНКА МАТРИЦ КОВАРИАЦИЙ

$$\widehat{\mathrm{COV}}\left(\mathbf{e}\right) = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{N-k}\mathbf{I} = s^2\mathbf{I};\quad \widehat{\mathrm{COV}}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}\right) = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}}{N-k} = s^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

6. НОРМАЛЬНОСТЬ

Если $u \sim N(0;\sigma^2\mathbf{I})$, то

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \in \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta};\sigma^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right) \sim \mathrm{N}\left(\boldsymbol{\beta};s^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\right);$$

$$\mathbf{e} \in \mathrm{N}\left(\mathbf{0};\sigma^2\mathbf{I}\right) \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0};s^2\mathbf{I}\right)$$

ТЕОРЕМА ГАУССА-МАРКОВА

В ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛИ,
В КОТОРОЙ ОШИБКИ ЯВЛЯЮТСЯ БЕЛЫМ ШУМОМ,
А МНОЖЕСТВО РЕГРЕССОРОВ ЛНЗ:

1.ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ЯВЛЯЮТСЯ ЛИНЕЙНЫМИ И НЕСМЕЩЕННЫМИ

2. В ЭТОМ КЛАССЕ ОНИ ЯВЛЯЮТСЯ ЭФФЕКТИВНЫМИ (BLUE –best linear unbiased estimators)

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}$$

1. $\mathbf{X}$ полного ранга, неслучайна
2. $\mathrm{E}\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\mathrm{Var}\left(\mathbf{u}\right) = \boldsymbol{\Omega}$ положительно определена
4. $\mathrm{cov}\left(\mathbf{X}, \mathbf{u}\right) = 0$
5. $\mathbf{u} \in \mathbf{N}\left(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega}\right)$

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ и обычный МНК

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \left(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega}\right) \quad \begin{pmatrix} \exists i, j: \ \operatorname{Var} u_i = \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 = \operatorname{Var} u_j \\ \exists i, j: \ \operatorname{cov}\left(u_i; u_j\right) \neq 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Var}\left(\mathbf{y}\right) = \operatorname{Var}\left(\mathbf{u}\right) = \boldsymbol{\Omega}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}; \quad \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{P}\mathbf{y}; \quad \mathbf{e} = \mathbf{M}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'; \quad \mathbf{M} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'$$

Упражнение :

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}; \quad \mathbf{P}' = \mathbf{P}; \quad \mathbf{M}^2 = \mathbf{M}; \quad \mathbf{M}' = \mathbf{M}; \quad \mathbf{P}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{0}$$

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ и обычный МНК

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \left(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega}\right); \quad \mathrm{Var}\left(\mathbf{y}\right) = \mathrm{Var}\left(\mathbf{u}\right) = \boldsymbol{\Omega}$$

$$\mathrm{E}\,\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \boldsymbol{\beta} + \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\,\mathrm{E}\left(\mathbf{u}\right) = \boldsymbol{\beta}$$

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ и обычный МНК

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim (\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega}); \quad \mathrm{Var}(\mathbf{y}) = \mathrm{Var}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\Omega}$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}\right) = \mathrm{Var}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}\right] = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\,\mathrm{Var}(\mathbf{y})\,\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}\right) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ и обычный МНК

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim (\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega}); \quad \mathrm{Var}(\mathbf{y}) = \mathrm{Var}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\Omega}$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}\right) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

$$\text{if} \quad \frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{as} \mathbf{Q}; \quad \frac{\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{as} \tilde{\mathbf{Q}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n}\right)^{-1} \frac{\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}}{n}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{n}\right)^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{as} \frac{1}{n}\cdot\mathbf{Q}^{-1}\cdot\tilde{\mathbf{Q}}\cdot\mathbf{Q}^{-1} \xrightarrow[n\to\infty]{as} \mathbf{0}$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ состоятельна, но неэффективна

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ и обычный МНК

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \left(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega}\right); \quad \operatorname{Var}\left(\mathbf{y}\right) = \operatorname{Var}\left(\mathbf{u}\right) = \boldsymbol{\Omega}$$

$$\operatorname{E}\mathbf{e} = \operatorname{E}\left(\mathbf{My}\right) = \mathbf{M}\operatorname{E}\mathbf{y} = \mathbf{M}\operatorname{E}\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\operatorname{Var}\left(\mathbf{e}\right) = \operatorname{Var}\left(\mathbf{My}\right) = \mathbf{M}\operatorname{Var}\left(\mathbf{y}\right)\mathbf{M}' = \mathbf{M\Omega M}$$

$$\operatorname{E}\left(\mathbf{e}'\mathbf{e}\right) = \operatorname{E}\left(\sum_{t=1}^{n} e_t^2\right) = \sum_{t=1}^{n}\operatorname{E} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n}\operatorname{Var}\left(e_t^2\right) =$$

$$= \operatorname{tr}\left[\operatorname{Var}\left(\mathbf{e}\right)\right] = \operatorname{tr}\left[\mathbf{M\Omega M}\right] = \operatorname{tr}\left[\mathbf{M}^2\boldsymbol{\Omega}\right] = \operatorname{tr}\left[\mathbf{M\Omega}\right]$$

$$\textit{Упражнение}: \operatorname{tr}\left[\mathbf{AB}\right] = \operatorname{tr}\left[\mathbf{BA}\right]$$

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ и обычный МНК

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \left(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega}\right); \quad \mathrm{Var}\left(\mathbf{y}\right) = \mathrm{Var}\left(\mathbf{u}\right) = \boldsymbol{\Omega}$$

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}\right) = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k} = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n-k} \Rightarrow \mathrm{E}\,\hat{\sigma}^2 = \mathrm{E}\frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n-k} = \frac{\mathrm{tr}\left[\mathbf{M}\boldsymbol{\Omega}\right]}{n-k}$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \hat{\sigma}^2\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

$$\mathrm{E}\,\widehat{\mathrm{Var}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \frac{\mathrm{tr}\left[\mathbf{M}\boldsymbol{\Omega}\right]}{n-k}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} \neq \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1} = \mathrm{Var}\,\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$\widehat{\mathrm{Var}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ - смещена

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \left(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega}\right)$$

Теорема Айткена :

Для обобщенной регрессионной модели оценка

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y} \quad \textit{является} \quad \boldsymbol{BLUE}\left(\textbf{\textit{best linear unbiased estimate}}\right)$$

$$\textbf{Лемма}: \quad \exists \quad \mathbf{R}: \det \mathbf{R} \neq 0,\ \mathbf{R}'\mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}$$

$$\textit{Док-во}: \quad \boldsymbol{\Omega}^{-1} \geq 0, \quad \left(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\right)' = \boldsymbol{\Omega}^{-1} \Rightarrow \exists\, \mathbf{S}: \quad \mathbf{S}' = \mathbf{S}^{-1} \quad \left(\mathbf{S} - \textit{ортогональная}\right)$$

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} = \mathbf{S}'\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{S}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \mathbf{S}'\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\mathbf{S}, \quad \boldsymbol{\Lambda} - \textit{диагональная}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i - \textit{с.ч.}\boldsymbol{\Omega}^{-1} \Rightarrow \mathbf{R} = \boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\mathbf{S}$$

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

$\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \left(\mathbf{0}; \mathbf{\Omega}\right)$

Теорема Айткена :

Для обобщенной регрессионной модели оценка

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$ *является* ***BLUE*** (***best linear unbiased estimate***)

Док - во :

$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{Ry}; \quad \mathbf{X}^* = \mathbf{RX}; \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{Ru}$

Выполнены условия **Теоремы Гаусса – Маркова, т.к.** :

$\mathrm{E}\,\mathbf{u}^* = \mathbf{0}; \quad \mathrm{Var}\,\mathbf{u}^* = \mathbf{R}\left(\mathrm{Var}\,\mathbf{u}\right)\mathbf{R}' = \mathbf{R\Omega R}' = \mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{SS}'\mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{SS}'\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{I\Lambda}^{-1/2}\mathbf{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{I} = \mathbf{I}$

$\mathrm{rank}\,\mathbf{X}^* = \mathrm{rank}\,\mathbf{X} = k$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}^*_{OLS} = \left(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*\right)^{-1} \mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y}^* = \left(\mathbf{X}'\mathbf{R}'\mathbf{RX}\right)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{R}'\mathbf{Ry} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$$

Упражнение : доказать несмещенность $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim \left(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega}\right)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\textit{Замечание}\ 1: \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \arg\min\left(\mathbf{e}^{*\prime}\mathbf{e}^{*}\right) = \arg\min\left(\left(\mathbf{y}^{*} - \mathbf{X}^{*}\boldsymbol{\beta}\right)'\left(\mathbf{y}^{*} - \mathbf{X}^{*}\boldsymbol{\beta}\right)\right) =$$

$$= \arg\min\left(\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)' \mathbf{R}'\mathbf{R}\left(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}\right)\right) = \arg\min\left(\mathbf{e}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{e}\right)$$

$$\textit{Упражнение}: \quad \mathrm{Var}\,\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}$$

Замечание 2: $R^2 = 1 - \dfrac{RSS}{TSS}$ не обладает свойствами обычного R^2, в частности: $R^2 \notin \left[0;1\right]$, не монотонен по количеству регрессоров

ОБОБЩЕННАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \sim (0; \boldsymbol{\Omega}); \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \left(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{u}^* \sim (0; \mathbf{I}); \quad \mathbf{y}^* = \mathbf{P}\mathbf{y}; \quad \mathbf{X}^* = \mathbf{P}\mathbf{X}; \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}; \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \left(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$$

ВЫВОДЫ:

1. **Для обобщенной регрессионной модели МНК-оценка остается несмещенной, состоятельной, но становится неэффективной**
2. **Оценка матрицы ковариаций МНК- оценки оказывается смещенной**
3. **Эффективной является оценка ОМНК**
4. **ОМНК-оценка может быть получена из МНК-оценки линейно-преобразованной исходной модели**
5. **Для нахождения ОМНК-оценки необходимо знать матрицу ковариаций ошибок**
6. **Естественным методом получения ОМНК-оценок является *ДОСТУПНЫЙ* ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ- оценка матрицы ковариаций ошибок и применение к ней ОМНК**
7. **Коэффициент детерминации R^2 не является адекватной мерой качества подгонки при использовании ОМНК**

Конец лекции