Плотности и ф.р. случайных величин:

3. Плотность распределения величины ξ имеет вид $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ c/x^4, & x \geq 1. \end{cases}$

Найти:

а) постоянную c;

б) функцию распределения F_ξ;

в) $\mathbb{P}(\xi = 2)$;

г) $\mathbb{P}(0.5 < \xi < 3)$;

При каких значениях параметров следующие функции будут плотностями некоторых с.в., найти ф.р., мат.ожидания и дисперсию:

1. $f(x) = \begin{cases} (x+b)^2, \ x \in [0;1] \\ 0, \ x \notin [0;1] \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot x^3 + b, \ x \in [-a;a] \\ 0, \ x \notin [-a;a] \end{cases}$

При каких значениях параметров следующие функции будут ф.р. некоторых с.в., найти плотности, мат.ожидания и дисперсию:

1. $F(x) = \begin{cases} a \cdot e^x + b, \ x \in [0;\ln 2] \\ 0, \ x \notin [0;\ln 2] \end{cases}$

2. $F(x) = \begin{cases} a \cdot \sqrt{x+b}, \ x \in [0;1] \\ 0, \ x \notin [0;1] \end{cases}$

При каких значениях параметров следующее правило задает закон распределения некоторой с.в., найти мат.ожидание и дисперсию: $P(x = k) = a \cdot b^k, \ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

Преобразования с.в.

4. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы и имеют одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения случайных величин $\eta = \max(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\zeta = \min(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Ответ. $F_\eta(x) = F^n(x)$, $F_\zeta(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.

8. Величина ξ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\alpha > 0$, т. е. $\mathbb{P}(\xi < x) = 1 - e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$. Найти плотности распределения величин $\sqrt{\xi}$ и ξ^2.

Ответ. $2\alpha x e^{-\alpha x^2}$, $x \geq 0$; $\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} e^{-\alpha\sqrt{x}}$, $x > 0$.

Доказать утверждения, найти мат.ожидание:

1. $x \sim \Lambda(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}} \quad \Rightarrow \quad l(x) = l(-x)$

2. $x \sim Pareto(a; x_m) : F_x(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x_m}{x}\right)^a, \ x > x_m \\ 0, \ x \leq x_m \end{cases} \quad \Rightarrow \quad h = 2 \cdot a \cdot \ln\left(\dfrac{x}{x_m}\right) \sim c_2^2$

Пользуясь свойствами устойчивости по сложению и линейности, найти среднее и дисперсию, определить моду:

$1.\ x \sim B(n; p)$

$2.\ x \sim \Gamma(k;q):\quad g(x) = \dfrac{x^{k-1} e^{-x/q}}{q^k \cdot \Gamma(k)}$

$3.\ x \sim c^2(k)$

<u>Корреляции, ковариации</u>

293. Пусть X, Y, Z — независимые случайные величины с конечными положительными дисперсиями. Проверить, могут ли случайные величины $X+Z$ и $Y+Z$ быть: а) зависимыми; б) независимыми.

296. Петя вычислил ковариацию роста X спортсменов из институтской баскетбольной команды, измеренного в см, и скорости бега Y (тех же спортсменов), измеренной в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Маша для той же совокупности баскетболистов вычислила ковариацию роста X, измеренного в м, и скорости бега Y, измеренной в $\frac{\text{м}}{\text{с}}$. Определить, в каком отношении находятся эти ковариации.

297. В условиях предыдущей задачи сравнить коэффициенты корреляции, полученные Петей и Машей.

298. Средние квадратичные отклонения случайных величин X и Y равны соответственно 5 и 4. Определить наибольшее возможное значение $\operatorname{cov}(X, Y)$.

6. Случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Найти коэффициент корреляции величин $\alpha\xi + \beta\eta$ и $\alpha\xi - \beta\eta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Ответ. $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$.

<u>Распределения связанные с нормальным</u>

Какому закону распределения подчиняются следующие с.в.:

$1.\ x_i \sim N(0;1),\ i = 1, 2,\ i.i.d.;\quad h \sim c_3^2;\quad z = x_1^2 + x_2^2 + h \sim ?$

$2.\ x_i \sim N(0;1),\ i = 1, \mathbf{K}, 4,\ i.i.d.;\quad h \sim N(0;4);\quad z = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}{h^2} \sim ?$

$3.\ x \sim C(0;1);\quad x^2 \sim ?$

$4.\ x_i \sim N(0;1),\ i = 1, \mathbf{K}, 4,\ i.i.d.;\quad h \sim c_9^2;\quad z = 1.5 \cdot \sqrt{\dfrac{h}{\sum_{i=1}^{4} x_i^2}} \sim ?$

$5.\ x_i \sim N(m; s^2),\ i = 1, \mathbf{K}, 4,\ i.i.d.;\quad \left(\dfrac{x_1 - x_2}{2 \cdot s^2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_3 - x_4}{2 \cdot s^2}\right)^2 + \mathbf{K} + \left(\dfrac{x_{2n-1} - x_{2n}}{2 \cdot s^2}\right)^2 \sim ?$

$6.\ \boldsymbol{\xi} = (x_2; x_2) \sim N\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}\right),\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};\quad A\boldsymbol{\xi} + b \sim ?$

<u>Совместные распределения с.в.</u>

1. Игральная кость подброшена два раза. Пусть ξ — количество выпавших единиц, а η — количество выпавших шестерок. Выписать совместное распределение (ξ, η) и найти ковариацию $\mathrm{Cov}(\xi, \eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$. Согласуется ли знак коэффициента корреляции с вашими представлениями о характере зависимости ξ и η?

Ответ. $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = -1/18$, $\rho(\xi, \eta) = -1/5$.

2. Случайная точка с координатами (ξ, η) равномерно распределена в треугольнике с вершинами в точках с координатами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$. Найти совместную плотность распределения $p_{\xi,\eta}(x,y)$, одномерные плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$ и вычислить ковариацию $\mathrm{Cov}(\xi, \eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$. Согласуется ли знак $\rho(\xi, \eta)$ с вашими представлениями о характере зависимости ξ и η?

Ответ. $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 2, & x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$ $p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ или } x > 1, \\ 2-2x, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$

$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \text{ или } y > 1, \\ 2-2y, & 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$ $\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = -1/36$, $\rho(\xi, \eta) = -1/2$.

1. Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} A, & x^2+y^2 \leq R^2, \\ 0, & x^2+y^2 > R^2. \end{cases}$ Найти значение постоянной A и одномерные плотности p_ξ и p_η. Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

Ответ. $A = \frac{1}{\pi R^2}$; $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x| \leq R, \\ 0, & |x| > R; \end{cases}$ нет.

2. Случайный вектор (ξ, η) имеет абсолютно непрерывное распределение. Его функция распределения имеет вид:

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ 1 - e^{-x^2} - e^{-2y} + e^{-x^2-2y}, & x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Найти

а) совместную плотность распределения $p_{\xi,\eta}(x,y)$;

б) вероятности $\mathbb{P}(-2 \leq \xi < 2,\ 1 \leq \eta < 3)$, $\mathbb{P}(\xi \geq 0,\ \eta \geq 1)$, $\mathbb{P}(\xi < 1,\ \eta \geq 2)$;

в) функции распределения F_ξ и F_η.

Являются ли величины ξ и η независимыми?

Ответ. а) $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0, \\ 4xe^{-x^2-2y}, & x > 0,\ y > 0; \end{cases}$ б) $e^{-2} - 2e^{-6} + e^{-10}$, e^{-2}, $e^{-4} - e^{-5}$;

в) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x^2}, & x > 0; \end{cases}$ $F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ 1 - e^{-2y}, & y > 0. \end{cases}$ Да.

7. На отрезок $[0,1]$ наудачу брошены две точки. Пусть ζ — координата левой точки, η — координата правой точки. Найти плотность совместного распределения ζ и η и вычислить коэффициент корреляции $\rho(\zeta, \eta)$.

Ответ. $p_{\zeta,\eta}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$ $\rho(\zeta, \eta) = 1/2$.

Следующую задачу лучше переформулировать в обратную: дана совместная ф.р. двух с.в., найти предельные и условные ф.р. и плотности, проверить независимость. Но можно решить и в такой формулировке, если не бояться интегрировать.

6. Независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, т. е. $p_{\xi_1}(x) = p_{\xi_2}(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$. Найти функцию распределения и плотность $\xi_1 + \xi_2$.

Ответ. $F_{\xi_1+\xi_2}(z) = 1 - e^{-\lambda z} - \lambda z e^{-\lambda z}$, $z > 0$; $p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$, $z > 0$.

277. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана функцией распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 1-2^{-x}-2^{-y}-2^{-x-y} & x \geqslant 0, y \geqslant 0, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Найти плотность распределения этой случайной величины.

4. Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность $p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} Cxy^2, & x \in [0,2],\ y \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$ Найти

а) значение постоянной C;

б) одномерные плотности $p_\xi(x)$ и $p_\eta(y)$;

в) функции распределения $F_\xi(x)$, $F_\eta(y)$, $F_{\xi,\eta}(x,y)$.

Являются ли случайные величины ξ и η независимыми?

Ответ. а) $C = 3/2$; б) $p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2], \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ $p_\eta(y) = \begin{cases} 3y^2, & y \in [0,1], \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$ в) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$
$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y^3, & 0 < y \le 1, \\ 1, & y > 1; \end{cases}$ $F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x) F_\eta(y)$. Да.

5. Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ 3^{-x-y} \ln^2 3, & x > 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Найти

а) функцию совместного распределения $F_{\xi,\eta}(x,y)$;

б) плотности распределений p_ξ и p_η случайных величин ξ и η;

в) $\mathbb{P}((\xi,\eta) \in B)$, где B — треугольник с вершинами в точках с координатами $(2,1)$, $(2,2)$ и $(5,1)$.

Являются ли ξ и η независимыми?

Ответ. а) $F_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \text{ или } y \le 0, \\ (1-3^{-x})(1-3^{-y}), & x > 0,\ y > 0; \end{cases}$ б) $p_\xi(x) = p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3^{-x} \ln 3, & x > 0; \end{cases}$
в) $14/27^2 \approx 0.0192$. Да.

В следующих задачах полезно найти предельные и условные распределения, предельные и условные мат.ожидания, дисперсии, корреляцию и ковариацию компонент.

1. Совместное распределение $p_{ij} = \mathbb{P}(\xi_1 = i, \xi_2 = j)$ случайных величин ξ_1 и ξ_2 задано таблицей

$i \diagdown j$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/12$	$7/24$
1	$5/24$	$1/6$	$1/8$

Найти:

а) одномерные распределения $p_{i\cdot} = \mathbb{P}(\xi_1 = i)$, $p_{\cdot j} = \mathbb{P}(\xi_2 = j)$ и проверить, являются ли величины ξ_1 и ξ_2 независимыми;

б) совместное распределение $q_{ij} = \mathbb{P}(\eta_1 = i, \eta_2 = j)$ случайных величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 \xi_2$;

в) одномерные распределения $q_{i\cdot} = \mathbb{P}(\eta_1 = i)$, $q_{\cdot j} = \mathbb{P}(\eta_2 = j)$.

276. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$Y \diagdown X$	-1	0	1
0	0	$0{,}1$	$0{,}4$.
1	$0{,}2$	$0{,}2$	$0{,}1$

Составить ряды распределения её компонент X и Y. Определить вероятность $\mathbf{P}\{X < Y\}$.

285. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$Y \backslash X$	-1	0	1
1	0,15	0,3	0,3
2	0,1	0,05	0,1

Здесь случайная величина X описывает доход инвестиционной компании на рынке акций, а случайная величина Y — доход на рынке облигаций. Составить ряды распределения её компонент X и Y, а также условный закон распределения компоненты X при условии $Y = 2$. Выяснить, зависимы ли компоненты X и Y. Найти закон распределения суммарного дохода компании $X + Y$.

295. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной случайной величины $(X;Y)$:

$Y \backslash X$	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Найти ковариацию и коэффициент корреляции её компонент X и Y.

5. В одной из групп 19 человек получили оценку за контрольную работу по теории вероятностей шкале от 2 до 5 баллов и экзаменационную оценку на зимней сессии. Пусть (ξ, η) — случайный вектор, представляющий собой пару оценок, полученных наудачу выбранным студентом. Распределение этого случайного вектора имеет вид:

$\xi \setminus \eta$	2	3	4	5
2	0	1/19	0	0
3	1/19	1/19	2/19	3/19
4	0	0	1/19	3/19
5	0	0	0	7/19

Найти $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{E}\eta$, $\operatorname{Var}\xi$, $\operatorname{Var}\eta$, $\operatorname{Cov}(\xi,\eta)$ и $\rho(\xi,\eta)$. Согласуется ли знак $\rho(\xi,\eta)$ с вашими представлениями о характере зависимости ξ и η?

Ответ. $\mathbb{E}\xi = \frac{74}{19} \approx 3.89$, $\mathbb{E}\eta = \frac{85}{19} \approx 4.47$, $\operatorname{Var}\xi = \frac{338}{361} \approx 0.94$, $\operatorname{Var}\eta = \frac{280}{361} \approx 0.78$, $\operatorname{Cov}(\xi,\eta) = \frac{189}{361} \approx 0.52$, $\rho(\xi,\eta) = \frac{189}{\sqrt{338 \cdot 280}} \approx 0.61$. Положительная корреляция должна быть ожидаема.

Двумерное нормальное распределение

286. Двумерная случайная величина $(X;Y)$ задана плотностью распределения $f(x,y) = c \cdot e^{-x^2 - 2xy - 4y^2}$. Найти неслучайную постоянную c, плотности распределения случайных величин X и Y, выяснить, зависимы ли маргинальные случайные величины X и Y.

Указание: свести к двумерному нормальному закону

302. Случайная величина $(X_1; X_2)$ задана плотностью распределения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{1{,}28\pi} e^{-\frac{1}{5{,}12}\left[(x_1-3)^2 - 0{,}6(x_1-3)(x_2-5) + 4(x_2-5)^2\right]}.$$

Найти коэффициент корреляции между случайными величинами X_1 и X_2.