# Элементы теории некооперативных игр

## *Введение*

Теория игр анализирует принятие решений экономическими субъектами (называемыми, в соответствии с установившейся традицией, игроками) в ситуациях, когда на результат этих решений оказывают влияние действия, предпринимаемые другими экономическими субъектами. Такие ситуации принято называть **играми**.

В настоящее время теория игр проникла практически во все области экономической теории — в экономику общественного сектора, экономику труда, в теорию отраслевых рынков, международную экономику, макроэкономику и т.д. Как оказалось, исследователи, занимавшиеся моделированием экономических и социальных явлений, предлагали решения, которые совпадают с теми или иными концепциями равновесия современной теории игр, еще до того, как эти концепции были сформулированы в явном виде и вошли в инструментарий теории игр. Приведем лишь несколько примеров: модели олигополии (А. Курно, Ж. Бертран, Г. Штакельберг), модель рынка «лимонов» (Дж. Акерлов), модель сигнализирования на рынке труда (М. Спенс), анализ аукционов в условиях неполной информации (У. Викри). Это совпадение не является чем-то случайным. Фактически предлагаемые решения оказывались естественным обобщением лежащих в основе современной неоклассической теории понятия *рационального поведения*.

Неоклассическая экономическая теория опирается на логику, которой руководствуются люди, осуществляя выбор в самых разных ситуациях повседневной жизни. Покупая те или иные товары, поступая учиться в университет, голосуя за ту или иную партию, решая вступить в брак и даже совершая преступления люди выбирают из двух или более альтернатив исходя из своих предпочтений. Другими словами, в основе неоклассической экономической теории лежит убеждение,[1] что любой феномен общественной жизни следует рассматривать как итог взаимодействия рациональных индивидуумов, выбирающих наилучшие (с их

[1] так называемый методологический индивидуализм



точки зрения) альтернативы из тех, которые для них доступны в данной ситуации.

Как правило, последствия решений, принимаемых одним экономическим субъектом, зависят от того, какие решения приняли, принимают или будут принимать другие. В ситуациях, когда эти решения (влияющие на положение экономического субъекта) ему неизвестны,[2] естественно считать, что он делает предположения (формирует ожидания) относительно того, какими эти решения могут быть. Тогда естественное обобщение рационального поведения — это оптимальные выборы экономических субъектов при данных ожиданиях.

Однако предположений о рациональности в общем случае оказывается недостаточным для того, чтобы предсказать, какие действия будут выбраны. Необходимо, таким образом, сделать какие-то предположения относительно ожиданий. Следуя сложившейся в экономической теории практике, мы будем здесь анализировать *равновесные* ситуации — ситуации, при которых ожидания экономических субъектов оказываются оправдавшимися, т.е. ожидаемые ими действия других экономических субъектов совпадают с фактически выбранными. Такой подход позволяет существенным образом сузить область возможных решений.

Мы не стремились представить здесь сколько-нибудь развернутое изложение теории игр, какой она сложилась к настоящему моменту.[3] Цель раздела скорее в том, чтобы дать понятие об идеях и продемонстрировать возможности теории игр в моделировании ситуаций, включающих стратегическое взаимодействие экономических субъектов.

## *1. Статические игры с полной информацией*

Под **статической игрой** понимают такую игру, в которой все ее участники принимают решения не зная, какие именно решения принимают другие. Обычно в этом случае говорят, что участники принимают решения *одновременно*, хотя сама по себе од-

[2] например, решения остальных олигополистов в моделях Курно и Бертрана

[3] В частности, мы не касаемся тем, относящимся к кооперативной теории игр.

новременность принятия решений в данном случае не важна. Под играми с **полной информацией** понимаются такие игры, в которых каждый из игроков точно знает характеристики других игроков.[4]

## Нормальная форма игры

Альтернативные действия, которые может предпринять игрок, в контексте статических игр с полной информацией, совпадают с тем, что в теории игр называется **стратегиями**, по причинам, которые станут ясны из дальнейшего.

Приведем пример статической игры с полной информацией.

**Игра 1.**[5] «Выбор компьютера»

Двое знакомых одновременно выбирают, компьютеры какого типа им купить. Первый предпочитает IBM PC, второй — Макинтош. Обладание компьютером любимого типа первый оценивает в $a$ ($a > 0$) некоторых условных единиц, а второй — в $b$ ($b > 0$) условных единиц. Полезность компьютера другого типа для обоих равна нулю. Каждый получает дополнительную выгоду ($c > 0$), если они выберут одинаковые компьютеры, поскольку в таком случае используемое ими программное обеспечение будет совместимым. ⇦

В этом примере каждый из игроков (мы будем их называть «Игрок 1» и «Игрок 2») имеет две стратегии, которые можно условно назвать «IBM» и «Mac». Описанную игру удобно представить в виде таблицы (матрицы) $2 \times 2$. В игре имеется четыре исхода: (IBM, IBM), (IBM, Mac) (Mac, IBM) и (Mac, Mac). Каждому исходу соответствует своя клетка таблицы; в этой клетке помещаются соответствующие выигрыши участников.[6] Игры такого рода, то

[4] Точный смысл терминов *статическая игра* и *игра с полной информацией* станет ясен из дальнейшего, когда мы рассмотрим динамические игры и игры с неполной информацией (байесовские игры) соответственно.

[5] Игра представляет собой вариант известной игры «Battle of sexes» — «Борьба полов».

[6] Мы будем использовать следующее соглашение при изображении матричных игр двух лиц. Игрок, чье имя стоит *слева*, выбирает *строки* таблицы и его выигрыши записываются *в левом нижнем углу* каждой клетки таблицы. Игрок, чье имя стоит *сверху*, выбирает *столбцы* таблицы и его вы-

есть игры с двумя участниками, каждый из которых имеет конечное число стратегий, принято называть матричными[7] играми двух лиц.

Таблица 1

| | | Игрок 2 | |
|---|---|---|---|
| | | IBM | Mac |
| Игрок 1 | IBM | $c$<br>$a+c$ | $b$<br>$a$ |
| | Mac | $0$<br>$0$ | $b+c$<br>$c$ |

В рассмотренном примере можно выделить три элемента:

- ✦ множество игроков,
- ✦ множество стратегий, которые могут выбрать игроки,
- ✦ выигрыши игроков.

И в общем случае, чтобы задать статическую игру с полной информацией, требуется указать перечисленные элементы. Описание игры в виде такого набора называется **нормальной формой** игры.[8] Можно сказать, предваряя дальнейшее, что это тот минимум, который необходим для описания *любой* игры. В более сложных типах игр становятся важными и другие аспекты анализируемой ситуации, такие как очередность ходов, информированность игроков, и т.д.

В дальнейшем, описывая общую статическую игру $m$ лиц с полной информацией, будем использовать следующие формальные обозначения для указанных элементов.

игрыши записываются *в правом верхнем углу*. При таком расположении проще понять где чья стратегия и где чей выигрыш. Свой выигрыш всегда расположен ближе к игроку, чем выигрыш партнера.

[7] точнее биматричными

[8] Ее также называют стратегической формой игры. Впервые в явной формулировка нормальной формы игры была дана в основополагающей статье Джона фон Неймана (Von Neumann, J. (1928), "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele," *Mathematische Annalen*, **100**, 295-320. Рус. пер. Дж. фон Нейман, К теории стратегических игр, в сборн. "Матричные игры", под ред. Н. Н. Воробьева, М.: Физматгиз, 1961, 173-204. См. также von Neumann, J., and O. Morgenstern (1944), *Theory of Games and Economic Behavior. Princeton*. Princeton University Press. Рус. пер. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, "Теория игр и экономическое поведение", М.: Наука, 1970.)

Множество **игроков** (множество участников) будем обозначать $I$:

$$I = \{1, \ldots, m\}.$$

Множество возможных стратегий $i$-го игрока — или просто **множество стратегий** $i$-го игрока — будем обозначать через $X_i$. Отдельную стратегию $i$-го игрока будем, как правило, обозначать через $x_i$. Совокупность стратегий всех игроков будем называть **исходом** игры. Т.е. исход игры — это набор

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m), \text{ где } \boldsymbol{x} \in X_1 \times \cdots \times X_m = X.$$

Будем предполагать, что у каждого из игроков есть своя целевая функция (в экономической теории ее называют функцией полезности). Обозначим целевую функцию $i$-го игрока через $u_i(\cdot)$. Каждому исходу игры она сопоставляет некоторое действительное число — **выигрыш**. Таким образом, в описании игры следует

Таблица 2

| | | Автомобилист: A | Автомобилист: B |
|---|---|---|---|
| Пешеход | A | −110 / −102 | −200 / −20 |
| | B | −100 / −120 | −500 / −100 |

задать для каждого игрока $i \in I$ функцию вида

$$u_i: X \mapsto \mathbb{R}.$$

Нормальная форма игры, в соответствии со сказанным выше, представляет собой набор

$$G = \langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

В некоторых играх есть элемент случайности. Если на вероятности случайных событий не влияют выборы, сделанные игроками, то принято говорить о **случайных ходах природы**. Рассмотрим в качестве примера следующую игру.

**Игра 2.**

В игре участвуют пешеход и автомобилист. Каждый из игроков имеет две стратегии: проявлять осторожность (A) и не проявлять осторожности (B). От выбранных стратегий зависит вероятность дорожно-транспортного происшествия (автомобилист собьет пешехода). Если оба ведут себя неосторожно, то вероятность



происшествия равна $1/2$, если только один ведет себя неосторожно, то вероятность равна $1/10$, а если оба осторожны, то вероятность равна $1/100$.

В случае, если произойдет столкновение, то ущерб пешехода составит $1000$ у.е.,[9] а ущерб автомобилиста — $200$ у.е. Кроме того, осторожное поведение на дороге связано для обоих игроков с издержками в $100$ у.е. ⇦

На примере Игры 2 рассмотрим, каким образом представить в нормальной форме игру, включающую случайность. Для этого нам необходимо задать способ вычисления выигрышей (все остальные элементы нормальной формы здесь уже указаны).

Стандартное предположение теории игр состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший **ожидаемый выигрыш**.[10] Предполагается, что в описании игры случайные выигрыши даны в таком виде, что можно рассчитать их математическое ожидание и использовать в качестве выигрышей в нормальной форме игры. Таким образом, выигрыши выражены в некоторых условных единицах (вовсе не обязательно денежных) и представляют некоторый абстрактный уровень полезности для игрока при данном сочетании стратегий.

Пусть оба участника игры проявляют осторожность, то есть реализовался исход (A, A). Если произойдет столкновение, то выигрыш пешехода составит $(-1100)$, а выигрыш водителя — $(-300)$. В противном случае выигрыш пешехода составит $(-100)$, а выигрыш водителя — $(-100)$. Ожидаемые выигрыши равны в этом случае:

$$\frac{1}{100} \cdot (-1100) + \frac{99}{100} \cdot (-100) = -110 \quad \text{— для пешехода,}$$

$$\frac{1}{100} \cdot (-300) + \frac{99}{100} \cdot (-100) = -102 \quad \text{— для автомобилиста.}$$

---

[9] условных единиц

[10] Здесь, как это обычно делается в экономической теории, предполагается, что определенные на лотереях предпочтения каждого игрока удовлетворяют условиям, которые гарантируют существование представляющей их линейной функции полезности (имеется в виду линейность по вероятностям). См. Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, "Теория игр и экономическое поведение", М.: Наука, 1970, П. Фишберн, "Теория игр для принятия решений". М.: Наука, 1978.

Аналогичные вычисления нужно провести для трех других исходов. Рассчитанные выигрыши представлены в Таблице 2.

Заметьте, что полученная нормальная форма игры не содержит информацию о случайных ходах природы, их вероятностях и соответствующих случайных выигрышах.

## Концепция доминирования

Задача теории игр — по данному описанию игры, предсказать, какие стратегии выберут игроки и каким при этом будет исход игры, или, по крайней мере, сузить множество прогнозируемых исходов. В некоторых случаях предсказать исход игры можно однозначно, если исходить из предположения о том, что каждый игрок рационален.

Пусть в Игре 1 (стр. 6) выгода от совместимости программного обеспечения сравнительно мала, например, $a = 2$, $b = 3$, $c = 1$ (Таблица 3).

Тогда вне зависимости от того, какой компьютер выберет 2-й игрок, 1-му игроку выгодно выбрать компьютер IBM PC, поскольку $3 > 0$ и $2 > 1$. Аналогично, 2-й игрок предпочтет Макинтош, поскольку $3 > 1$ и $4 > 0$. В обоих случаях имеет место так называемое строгое доминирование двух указанных стратегий: если стратегия A при любых действиях других игроков дает больший выигрыш, чем стратегия B, то принято говорить, что стратегия A **строго доминирует** стратегию B.

Таблица 3

| | | **Игрок 2** | |
|---|---|---|---|
| | | IBM | Mac |
| **Игрок 1** | IBM | 3, 1 | 2, 3 |
| | Mac | 0, 0 | 1, 4 |

Дадим формальное определение строгого доминирования. Здесь и в дальнейшем мы будем применять обозначение $\boldsymbol{x}_{-i}$, что означает «все элементы вектора $\boldsymbol{x}$, кроме $i$-го», т.е.

$$\boldsymbol{x}_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n).$$

При этом будем считать, что $(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})$.— это то же самое, что $\boldsymbol{x}$.

**Определение 1.**

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока $i$ строго доминирует стратегию $y_i \in X_i$, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, выполнено

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}),$$

где $X_{-i} = \bigtimes_{j \neq i} X_j$.

Определение строгого доминирования можно наглядно проиллюстрировать в случае двух игроков, множества стратегий одного из которых — действительная прямая (см. Рис 1). На рисунке стратегия $x_1$ первого игрока строго доминирует стратегию $y_1$. Это выражается в том, что график функции полезности этого игрока по стратегии $x_2$ второго, соответствующий $x_1$, лежит ниже графика, соответствующего $y_1$.

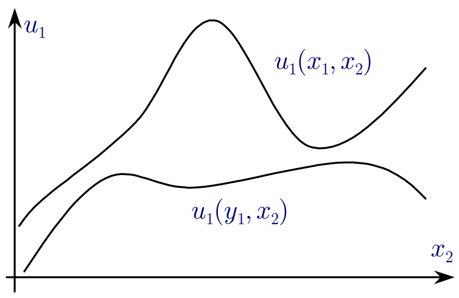


Рисунок 1. Стратегия $\boldsymbol{x}_1$ строго доминирует стратегию $\boldsymbol{y}_1$.

Стратегия называется строго доминирующей, если она строго доминирует любую другую стратегию.

**Определение 2.**

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока $i$ является его **строго доминирующей стратегией**, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, она дает игроку $i$ больший выигрыш, чем любая другая его стратегия $y_i \in X_i$, т.е.

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i})\ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}\ \forall y_i \in X_i\colon\ y_i \neq x_i.$$

В соответствие с данным определением не может существовать более одной строго доминирующей стратегии. Естественно ожидать, что рациональный игрок выберет именно такую стратегию. Поэтому при наличии у каждого игрока строго доминирующей стратегии исход игры может быть предсказан однозначно.

Предсказание исхода игры не столь однозначно, когда у каждого игрока имеется лишь так называемая (слабо) доминирующая стратегия, обеспечивающая этому игроку не меньший выигрыш, чем любая другая его стратегия при любых стратегиях других игроков. Приведем определения (слабого) доминирования.

**Определение 3.**

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока $i$ (слабо) **доминирует** стратегию $y_i \in X_i$ (или, другими словами, стратегия $y_i$ доминируется стратегией $x_i$), если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, выполнено

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \geqslant u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}),$$

и существует хотя бы один набор стратегий других игроков, $\boldsymbol{x}'_{-i} \in X_{-i}$, такой что

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}'_{-i}) > u_i(y_i, \boldsymbol{x}'_{-i}).$$

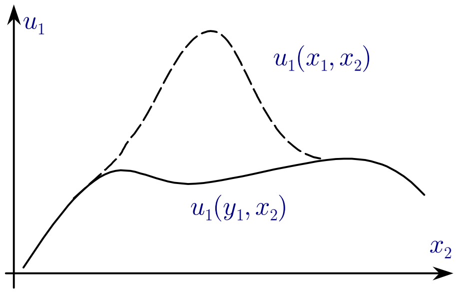


Рисунок 2. Стратегия $\boldsymbol{x_1}$ (слабо) доминирует стратегию $\boldsymbol{y_1}$.

Слабое доминирование можно проиллюстрировать на графике, аналогичном тому, который мы использовали для иллюстрации строгого доминирования. Стратегия $x_1$ первого игрока слабо, но не строго доминирует его стратегию $y_1$ (см. Рис. 2), поскольку график функции полезности для $x_1$ не везде строго выше, чем для $y_1$.

**Определение 4.**

Стратегия $x_i \in X_i$ игрока $i$ является его (слабо) **доминирующей стратегией**, если при любых стратегиях, выбранных остальными игроками, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, она доминирует любую другую его стратегию, $y_i \in X_i$, либо эквивалентна ей, т.е.

$$u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \geqslant u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i} \ \forall y_i \in X_i.$$

Из определения следует, что если стратегия $x_i$ *строго доминирует* стратегию $y_i$, то стратегия $x_i$ *доминирует* стратегию $y_i$.



Кроме того, если стратегия является *строго доминирующей*, то она является *доминирующей*.

**Определение 5.**

Исход игры $\boldsymbol{x}^* \in X$ является **равновесием в доминирующих стратегиях**, если стратегия каждого игрока в этом исходе является его доминирующей стратегией.

Естественно ожидать, что если в игре существует равновесие в доминирующих стратегиях, то именно оно будет реализовавшимся исходом игры. Следующая игра иллюстрирует равновесие в доминирующих стратегиях.

**Игра 3.** «Парламентское голосование»

Парламент разделен на 3 фракции: «белые», «зеленые» и «красные». В каждой фракции одинаковое количество членов. Проходит голосование по некоторому законопроекту. Каждая из фракций может проголосовать «за» или «против». Решение принимается большинством голосов. Зеленым и красным нравится законопроект, белым — нет. Если законопроект пройдет, то зеленые и красные получат выигрыш $1$, а белые — $-1$, в противном случае все получат $0$. ⇦

Таблица 4

$(A)$ **Белые:** за

| | | Красные: за | Красные: против |
|---|---|---|---|
| Зеленые | за | $-1$ $1$ $1$ | $-1$ $1$ $1$ |
| Зеленые | против | $-1$ $1$ $1$ | $0$ $0$ $0$ |

$(B)$ **Белые:** против

| | | Красные: за | Красные: против |
|---|---|---|---|
| Зеленые | за | $-1$ $1$ $1$ | $0$ $0$ $0$ |
| Зеленые | против | $0$ $0$ $0$ | $0$ $0$ $0$ |

Удобно представить исходы игры в виде двух таблиц А и Б (см. Таблицу 4). Белые выбирают между таблицей А и таблицей Б. Их выигрыши записаны в левом верхнем углу этих таблиц.

Если зеленые проголосуют за, то вектор их выигрышей будет

$(1$ (за, за)$, 1$ (за, против)$, 1$ (против, за)$, 0$ (против, против)$)$.

В скобках указано, как голосуют другие фракции. Если же они проголосуют против, то вектор выигрышей будет

$(1$ (за, за)$, 0$ (за, против)$, 0$ (против, за)$, 0$ (против, против)$)$.

Очевидно, что голосовать за законопроект является доминирующей стратегией зеленых. То же самое можно сказать и о красных.

Белые имеют следующие выигрыши (при аналогичных предположениях о том как голосуют другие фракции):

за $(-1, -1, -1, 0)$,

против $(-1, 0, 0, 0)$.

Таким образом, голосовать против законопроекта является доминирующей стратегией белых (хотя, заметим, эта стратегия не сможет им помочь выиграть).

Тем самым, в этой игре существует равновесие в доминирующих стратегиях. В нем зеленые и красные голосуют «за», а белые — «против».

Приведем теперь пример игры с непрерывными стратегиями, в который есть равновесие в доминирующих стратегиях.

**Игра 4.** «Аукцион Ви́кри».[11]

Некий предмет продается с аукциона по следующим правилам. Каждый из участников аукциона ($i = 1, ..., n$) подает в тайне от других свою заявку — предлагаемую им цену $p_i$. Побеждает участник, предложивший самую высокую цену, но платит он следующую по порядку убывания цену. Если самую высокую цену предложат сразу несколько участников, то победитель определяется жребием. Если $i$-й участник окажется победителем, то его выигрыш составит $v_i - p$, где $v_i$ — ценность для него данного предмета, $p$ — цена, которую он должен заплатить; выигрыш всех остальных участников будет равен нулю. ⇦

[11] W. Vickrey (1961), "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *Journal of Finance*, **16**, 8-37. Уильям Викри стал Нобелевским лауреатом по экономике за 1996г.

Особенность аукциона Викри состоит в том, что «правдивая» стратегия является доминирующей стратегией для каждого участника. Под «правдивой» стратегией понимается стратегия, заключающаяся в том, что участник называет цену, совпадающую с ценностью для него данного предмета, ($p_i = v_i$). Проверим это. Проанализируем данную игру при $n = 2$. (При большем количестве участников рассуждения будут аналогичными). Поскольку участники входят в данную игру симметрично, то достаточно рассмотреть мотивацию только одного из них, например, 1-го.

Вычислим сначала выигрыши 1-го игрока при разных исходах. Если 1-й участник назовет более высокую цену, чем 2-й ($p_1 > p_2$), то он выиграет аукцион и заплатит $p_2$. При этом его выигрыш составит $v_1 - p_2$. Если 1-й участник назовет более низкую цену, чем 2-й ($p_1 < p_2$), то он проиграет аукцион и получит выигрыш $0$. Если цены совпадут ($p_1 = p_2$), то с вероятностью 1/2 1-й участник выиграет и получит выигрыш $v_1 - p_2$, а с вероятностью 1/2 он проиграет и получит выигрыш $0$. Таким образом, его ожидаемый выигрыш составит $(v_1 - p_2)/2$. Окончательно запишем функцию выигрыша 1-го участника:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} v_1 - p_2, & \text{если } p_1 > p_2 \\ \dfrac{v_1 - p_2}{2}, & \text{если } p_1 = p_2 \\ 0, & \text{если } p_1 < p_2. \end{cases}$$

Чтобы показать, что «правдивая» стратегия, $p_1 = v_1$, является доминирующей, нужно показать, что она дает не меньший выигрыш, чем любая другая стратегия. Следует рассмотреть 3 случая: $p_2 > v_1$, $p_2 = v_1$ и $p_2 < v_1$.

$[p_2 > v_1]$ Если 2-й участник назовет цену, превышающую $v_i$, то 1-му участнику не выгодно выигрывать аукцион; его выигрыш (полезность) в этом случае был бы отрицательный, а в случае проигрыша он получит $0$. Поскольку в рассматриваемом случае при выборе «правдивой» стратегии 1-й участник проиграет аукцион, то «правдивая» стратегия является одной из оптимальных.

$[p_2 = v_1]$ Если 2-й участник назовет цену, совпадающую с $v_i$, то 1-й участник при любом выборе получит $0$. Значит, «правдивая» стратегия даст ему выигрыш не меньший, чем любая другая.

$[p_2 < v_1]$ Если 2-й участник назовет цену, меньшую $v_i$, то для 1-го участника выгодно выиграть аукцион, поскольку в этом случае его выигрыш будет положительным. «Правдивая» стратегия обеспечивает ему победу на аукционе, и приносит максимальный выигрыш, $v_1 - p_2$.

Мы видим, что «правдивая» стратегия в самом деле является доминирующей для 1-го участника. Более того, как несложно увидеть, это единственная доминирующая стратегия. Если он назовет цену ниже или выше своей оценки $v_1$, то можно подобрать такую цену 2-го участника, что 1-й участник потеряет по сравнению с $p_1 = v_1$.

Проведя аналогичные рассуждения для 2-го участника, мы сделаем вывод, что в этой игре существует (единственное) равновесие в доминирующих стратегиях.

$$p_1 = v_1, \qquad p_2 = v_2.$$

## Последовательное отбрасывание строго доминируемых стратегий

К сожалению, довольно часто бывает, что по крайней мере у одного из игроков нет строго доминирующей стратегии или даже просто доминирующей стратегии. Иногда в таких играх исход можно предсказать однозначно, если дополнительно к рациональности предположить, что каждый игрок знает цели партнеров и способен достаточно глубоко «просчитать» их умозаключения.

Рассмотрим в Игре 1 случай, когда $a < c < b$. Пусть, к примеру, $a = 1$, $c = 2$, $b = 3$.

Если 2-й игрок выберет IBM, то 1-му игроку тоже выгодно выбрать IBM. Если же 2-й игрок выберет Макинтош, то 1-му игроку будет выгодно выбрать Макинтош. Эти оптимальные решения выделены в Таблице 5 подчеркиванием соответствующих выигрышей. Здесь оптимальное для 1-го игрока решение будет зависеть от того, какое решение примет 2-й игрок.

В этом и ему подобных случаях нельзя рассматривать мотивацию одного игрока, не рассматривая мотивацию других игроков. Игрок, у которого нет доминирующей стратегии, должен делать какие-то предположения о том, какие стратегии могут

Таблица 5

| | | **Игрок 2** | |
|---|---|---|---|
| | | IBM | Mac |
| **Игрок 1** | IBM | $\underline{3}$ ; 2 | 1 ; 3 |
| | Mac | 0 ; 0 | $\underline{2}$ ; 5 |



выбрать другие игроки. Не специфицируя механизма формирования ожиданий, мы можем исходить из того, что все такие механизмы не противоречат рациональности игроков. Наиболее очевидное требование можно сформулировать следующим образом:

«*Рациональный игрок не станет выбирать строго доминируемую стратегию*».

**Определение 6.**

Стратегия $y_i \in X_i$ игрока $i$ называется строго доминируемой, если существует стратегия $x_i \in X_i$, которая ее строго доминирует, т.е.

$$u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) < u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}.$$

Проанализируем ситуацию, в которой структура игры (множества стратегий и функции выигрышей), а также то, что все игроки рациональны, известно каждому игроку. Более того, мы рассмотрим ситуацию, в которой все это *общеизвестно*,[12] то есть не только каждый игрок знает это, но он знает, что все другие игроки знают это, и так далее до бесконечности.

В этом случае игрок должен не только сам исходить из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию, но и учитывать, что другие игроки исходят из того, что ни один из игроков не выберет доминируемую стратегию. Эту цепочку предположений следует продолжить до бесконечности.

На этой основе строится метод получения решения игры путем отбрасывания строго доминируемых стратегий. Если в результате последовательности шагов, состоящих в вычеркивании строго доминируемых стратегий получился «остаток», в котором у каждого игрока только одна стратегия, то при сделанных нами предположениях о рациональности представляется естественным, что игроки должны выбрать именно эти не отброшенные стратегии.

Можно отметить, что в данном случае предполагается не только рациональность игроков, но и их способность провести соответствующие рассуждения, ведь цепочка рассуждений может быть достаточно длинной (я знаю, что он знает, что я знаю...).

[12] англ. *common knowledge*

В Таблице 6 и таблицах на Рис. 3 показан пример процесса отбрасывания строго доминируемых стратегий. В исходной игре 3×3 (Таблица 6) стратегия II строго доминирует стратегию III, поэтому стратегию III следует вычеркнуть (игрок выбирающий строки, не станет выбирать эту стратегию). Отбрасываемая стратегия обведена двойной волнистой рамкой. Остается игра 2×3 (Рис. 3 а) ), в которой стратегия A строго доминирует стратегию C. Стратегию C вычеркиваем (поскольку игрок, выбирающий столбцы, прогнозируя действия игрока, выбирающего строки, не станет ее выбирать). В получившейся игре 2×2 (Рис. 3 б) ) стратегия I строго доминирует стратегию II. В получившейся после отбрасывания стратегии II игре (Рис. 3 в) ) у игрока, выбирающего строки, осталась только одна стратегия. Для игрока, выбирающего столбцы, стратегия A строго лучше стратегии B, поэтому стратегия B вычеркивается. Остается игра (Рис. 3 г) ), в которой каждый игрок имеет только по одной стратегии: (I, A). На основании этого можно сделать вывод, что в исходной игре 3×3 должен реализоваться исход (I, A).

Таблица 6

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| I | 2, 3 | 3, 0 | 2, 1 |
| II | 1, 4 | 2, 6 | 4, 2 |
| III | 0, 7 | 1, 2 | 3, 8 |

а)

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| I | 2, 3 | 3, 0 | 2, 1 |
| II | 1, 4 | 2, 6 | 4, 2 |

б)

| | A | B |
|---|---|---|
| I | 2, 3 | 3, 0 |
| II | 1, 4 | 2, 6 |

в)

| | A | B |
|---|---|---|
| I | 2, 3 | 3, 0 |

г)

| | A |
|---|---|
| I | 2, 3 |

Рисунок 3.

Если общеизвестно, что игроки рациональны, и после последовательного вычеркивания строго доминируемых стратегий у каждого игрока останется единственная стратегия (как в приведенной выше игре), то, как и в случае существования строго доминирующих стратегий у каждого игрока, исход игры может быть предсказан однозначно.[13]

Даже если рассматриваемая процедура даст неоднозначный результат, то по крайней мере можно быть уверенным, что решение должно принадлежать полученному «остатку».

Ситуации, когда в игре существует равновесие в доминирующих стратегиях, достаточно редки. И далеко не во всех играх можно найти решение, отбрасывая строго доминируемые стратегии. Соответствующий пример игры представлен в Таблице 7.

Таблица 7

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| X | 2, 3 | 2, 0 | 3, 1 |
| Y | 1, 4 | 4, 6 | 2, 2 |
| Z | 3, 7 | 1, 2 | 3, 8 |

Второй игрок выберет стратегию A, если предполагает, что первый выберет стратегию Z; в то же время стратегия B для него предпочтительнее в случае, если первый выберет Y.

Естественно предположить, что при отсутствии у всех игроков доминирующих стратегий, выбор каждого игрока зависит от *ожиданий* того, какими будут выборы других. Далее мы рассмотрим концепцию решения, основанную на этой идее.

## Равновесие по Нэшу

Кроме ситуаций, рассмотренных в предыдущем разделе, бывают ситуации,[14] которые естественно моделировать, исходя из следующих предположений:

---

[13] Остаток при последовательном отбрасывании *строго* доминируемых стратегий всегда один и тот же, вне зависимости от того, в каком порядке происходит отбрасывание стратегий. Можно рассмотреть также процедуру последовательного отбрасывания (слабо) доминируемых стратегий (правда она кажется менее обоснованной с точки зрения рациональности). В этой последней процедуре порядок уже существенен.

[14] Можно представить себе популяцию игроков типа A (скажем, кошки) и игроков типа Б (скажем, мышки). Игрок типа A при встрече с игроком типа Б имеет оправданные своим или чужим опытом ожидания

- игроки при принятии решений ориентируются на предполагаемые действия партнеров;
- ожидания являются равновесными (совпадают с фактически выбранными партнерами действиями).

Если считать, что все игроки рациональны, так что каждый выбирает стратегию, дающую ему наибольший выигрыш при данных ожиданиях, то эти предположения приводят к концепции решения, называемой **равновесием Нэша**. В равновесии у каждого игрока нет оснований пересматривать свои ожидания.

Формально равновесие Нэша определяется следующим образом.

**Определение 7.**

Набор стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$ является равновесием Нэша,[15] если:

1) стратегия $x_i^*$ каждого игрока является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков $\boldsymbol{x}_{-i}^e$:

$$u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^e) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^e) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n;$$

2) ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:

$$\boldsymbol{x}_{-i}^e = \boldsymbol{x}_{-i}^* \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что при использовании равновесия Нэша для моделирования игровых ситуаций вопросы о том, знают ли игроки цели партнеров, знают ли они о рациональности партнеров, умеют ли их просчитывать, и т.д., отходят на второй план. Способ формирования ожиданий выносится за рамки анализа; здесь важно только то, что ожидания являются равновесными.

Но если при анализе равновесия Нэша не важно, знает ли игрок цели других игроков, то может возникнуть сомнение в правомерности рассмотрения концепции Нэша в контексте игр с *полной информацией*. Все дело в том, что термин «полная информация» в теории игр имеет довольно узкое значение. Он фактически подразумевает только полноту сведений о типах партнеров (термин «тип игрока», разъясняется в параграфе, посвященном байесовским играм).

Как легко видеть, приведенное определение равновесия Нэша эквивалентно следующему свойству, которое обычно и используется в качестве определения:

> Набор стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$ является равновесием Нэша, если стратегия $x_i^*$ каждого игрока является наилучшим для него откликом на стратегии других игроков $\boldsymbol{x}_{-i}^*$:
>
> $$u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Это свойство можно также записать в терминах так называемых функций (отображений) отклика.

**Определение 8.**

**Отображение отклика** $i$-го игрока,

$$R_i: X_{-i} \mapsto X_i,$$

сопоставляет каждому набору стратегий других игроков, $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$, множество стратегий $i$-го игрока, каждая из которых является наилучшим откликом на $\boldsymbol{x}_{-i}$. Другими словами,

$$u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) = \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}) \qquad \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}, \forall y_i \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}).$$

Введение отображений отклика позволяет записать определение равновесия Нэша более компактно: набор стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$ является равновесием Нэша, если

$$x_i^* \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Если отклик каждого игрока однозначен (является *функцией*), то множество равновесий Нэша совпадает с множеством решений системы уравнений:

относительно поведения партнера типа Б, и заранее на них ориентируется (и наоборот). Однако это не единственный тип ситуаций, в которых рассматриваемый подход является адекватным.

[15] Американский математик Джон Нэш получил Нобелевскую премию по экономике в 1994 г. вместе с Дж. Харшаньи и Р. Зельтеном «за новаторский анализ равновесий в теории некооперативных игр». Концепция равновесия была предложена в следующих статьях: Nash, J. F. (1950) "Equilibrium Points in N-Person Games," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **36**, 48-49. Nash, J. F. (1951) "Non-Cooperative Games," *Annals of Mathematics*, **54**, 286-295.

Следует оговориться, что сам Нэш не вводил в определение ожиданий. Исходное определение Нэша совпадает с тем свойством, о котором говорится далее.

$$x_i^* = R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

В Таблице 7 отображения отклика игроков изображены подчеркиванием выигрышей, соответствующих оптимальным действиям. Равновесие Нэша в данной игре — клетка (B, Y), поскольку выигрыши обоих игроков в ней подчеркнуты.

Проиллюстрируем использование функций отклика на примере игры, в которой игроки имеют континуум стратегий.

**Игра 5.** *«Международная торговля»*

Две страны одновременно выбирают уровень таможенных пошлин, $\tau_i$. Объем торговли между странами, $x$,[16] зависит от установленных пошлин как

$$x = 1 - \tau_1 - \tau_2.$$

Цель каждой страны — максимизировать доходы:

$$u_i = \tau_i x \to \max.$$

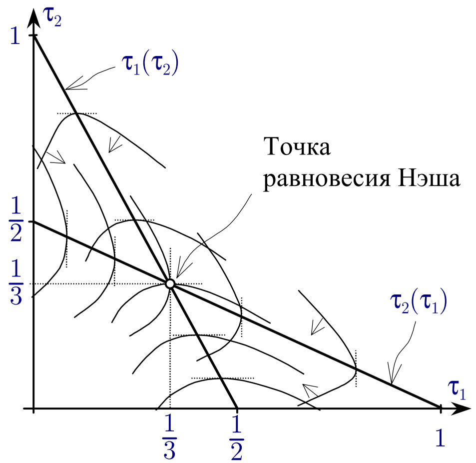


Рисунок 4. Равновесие Нэша в игре «Международная торговля»

⇦

Максимизируем выигрыш 1-й страны,

$$\tau_1(1 - \tau_1 - \tau_2),$$

[16] В этой игре мы для упрощения не делаем различия между экспортом и импортом.

по $\tau_1$ считая фиксированным уровень пошлины, установленный 2-й страной. Условие первого порядка имеет вид

$$1 - 2\tau_1 - \tau_2 = 0.$$

Поскольку максимизируемая функция строго вогнута, то условие первого порядка соответствует глобальному максимуму.

Условие первого порядка для задачи максимизации выигрыша 2-й страны находится аналогично:

$$1 - \tau_1 - 2\tau_2 = 0.$$

Решив систему из двух линейных уравнений, найдем равновесие Нэша:

$$\tau_1^* = \tau_2^* = 1/3.$$

Оптимальный отклик 1-й страны на уровень таможенной пошлины, установленной 2-й страной описывается функцией

$$\tau_1(\tau_2) = \frac{1 - \tau_2}{2}.$$

Аналогично, функция отклика 2-й страны имеет вид

$$\tau_2(\tau_1) = \frac{1 - \tau_1}{2}.$$

Чтобы найти равновесие Нэша, требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} \tau_1(\tau_2^*) = \tau_1^*, \\ \tau_2(\tau_1^*) = \tau_2^*. \end{cases}$$

Графически поиск равновесия Нэша показан не Рис. 4. Точки, лежащие на кривых оптимального отклика $\tau_1(\tau_2)$ и $\tau_2(\tau_1)$, характеризуются тем, что в них касательные к кривым безразличия игроков параллельны соответствующей оси координат. Напомним, что кривой безразличия называют множество точек, в которых полезность рассматриваемого индивидуума одна и та же ($u_i(\boldsymbol{x}) = const$). Равновесие находится как точка пересечения кривых отклика.

Преимущество использования концепции равновесия Нэша состоит в том, что можно найти решение и в тех играх, в которых отбрасывание доминируемых стратегий не позволяет этого сделать. Однако сама концепция может показаться более спорной, поскольку опирается на сильные предположения о поведении игроков.

Связь между введенными концепциями решений описывается следующими утверждениями.

**Теорема 1**.
Если $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в некоторой игре, то ни одна из составляющих его стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Обратная теорема верна в случае единственности.

**Теорема 2**.
Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия, $x_i^*$, то $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в этой игре.

Доказательства этих двух утверждений даны в Приложении В (стр. 18). Нам важно здесь, что концепция Нэша не входит в противоречие с идеями рациональности, заложенной в процедуре отбрасывания строго доминируемых стратегий.

По-видимому, естественно считать, что разумно определенное равновесие, не может быть отброшено при последовательном отбрасывании строго доминируемых стратегий. Первую из теорем можно рассматривать как подтверждение того, что концепция Нэша достаточно разумна. Отметим, что данный результат относится только к строгому доминированию. Можно привести пример равновесия Нэша с одной или несколькими слабо доминируемыми стратегиями (см. напр. Таблицу 12 на стр. 27).

## Равновесие Нэша в смешанных стратегиях

Нетрудно построить примеры игр, в которых равновесие Нэша отсутствует. Следующая игра представляет пример такой ситуации.

**Игра 6.** «*Инспекция*»

В этой игре первый игрок (проверяемый) поставлен перед выбором — платить или не платить подоходный налог. Второй — налоговой инспектор, решает, проверять или не проверять именно этого налогоплательщика. Если инспектор «ловит» недобросовестного налогоплательщика, то взимает в него штраф и получает поощрение по службе, более чем компенсирующее его



издержки; в случае же проверки «исправного» налогоплательщика, инспектор, не получая поощрения, тем не менее несет издержки, связанные с проверкой. Матрица выигрышей представлена в таблице 8.

Таблица 8

| | | Инспектор | |
|---|---|---|---|
| | | проверять | не проверять |
| Проверяемый | нарушать | $-1$; $\underline{1}$ | $\underline{1}$; $0$ |
| | не нарушать | $\underline{0}$; $-1$ | $0$; $\underline{0}$ |

Если инспектор уверен, что налогоплательщик выберет не платить налог, то инспектору выгодно его проверить. С другой стороны, если налогоплательщик уверен, что его проверят, то ему лучше заплатить налог. Аналогичным образом, если инспектор уверен, что налогоплательщик заплатит налог, то инспектору не выгодно его проверять, а если налогоплательщик уверен, что инспектор не станет его проверять, то он предпочтет не платить налог. Оптимальные отклики показаны в таблице подчеркиванием соответствующих выигрышей. Очевидно, что ни одна из клеток не может быть равновесием Нэша, поскольку ни в одной из клеток не подчеркнуты одновременно оба выигрыша.

В подобной игре каждый игрок заинтересован в том, чтобы его партнер не смог угадать, какую именно стратегию он выбрал. Этого можно достигнуть, внеся в выбор стратегии элемент неопределенности.

Те стратегии, которые мы рассматривали раньше, принято называть **чистыми стратегиями**. Чистые стратегии в статических играх по сути дела совпадают с действиями игроков. Но в некоторых играх естественно ввести в рассмотрение также смешанные стратегии. Под **смешанной стратегией** понимают распределение вероятностей на чистых стратегиях. В частном случае, когда множество чистых стратегий каждого игрока конечно,

$$X_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^{n_i}\},$$

(соответствующая игра называется **конечной**,), смешанная стратегия представляется вектором вероятностей соответствующих чистых стратегий:

$$\mu_i = (\mu_i^1, \ldots, \mu_i^{n_i}).$$

Обозначим множество смешанных стратегий $i$-го игрока через $\mathrm{M}_i$:

$$\mathrm{M}_i = \{\mu_i \mid \mu_i^k \geqslant 0,\ k=1, \ldots n_i;\ \mu_i^1 + \ldots + \mu_i^{n_i} = 1\}.$$

Как мы уже отмечали, стандартное предположение теории игр (как и экономической теории) состоит в том, что если выигрыш — случайная величина, то игроки предпочитают действия, которые приносят им наибольший ожидаемый выигрыш. Ожидаемый выигрыш $i$-го игрока, соответствующий набору смешанных стратегий всех игроков, $(\mu_1, \ldots, \mu_m)$, вычисляется по формуле

$$U(\mu_i, \mu_{-i}) = \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \mu_1^{k_1} \cdots \mu_m^{k_m}\, u_i(x_1^{k_1}, \ldots, x_m^{k_m}).$$

Ожидание рассчитывается в предположении, что игроки выбирают стратегии независимо (в статистическом смысле).

Смешанные стратегии можно представить как результат **рандомизации** игроком своих действий, то есть как результат их случайного выбора. Например, чтобы выбирать каждую из двух возможных стратегий с одинаковой вероятностью, игрок может подбрасывать монету. Эта интерпретация подразумевает, что выбор стратегии зависит от некоторого *сигнала*, который сам игрок может наблюдать, а его партнеры — нет.[17] Например, игрок может выбирать стратегию в зависимости от своего настроения, если ему известно распределение вероятностей его настроений, или от того, с какой ноги он в этот день встал.[18]

**Определение 9.**

Набор смешанных стратегий $\mu^* = (\mu_1^*, \ldots, \mu_m^*)$ является **равновесием Нэша в смешанных стратегиях**, если:

1) стратегия $\mu_i^*$ каждого игрока является наилучшим для него откликом на ожидаемые им стратегии других игроков $\mu_{-i}^e$:

$$U(\mu_i^*, \mu_{-i}^e) = \max_{\mu_i \in \mathrm{M}_i} U(\mu_i, \mu_{-i}^e)\ \ \forall\, i = 1, \ldots, n;$$

2) ожидания совпадают с фактически выбираемыми стратегиями:

$$\mu_{-i}^e = \mu_{-i}^*\ \ \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что *равновесие Нэша в смешанных стратегиях является обычным равновесием Нэша в так называемом смешанном расширении игры*, т.е. игре, чистые стратегии которой являются смешанными стратегиями исходной игры.

Найдем равновесие Нэша в смешанных стратегиях в Игре 6.

Обозначим через $\mu$ вероятность того, что налогоплательщик не платит подоходный налог, а через $\nu$ — вероятность того, что налоговой инспектор проверяет налогоплательщика.

В этих обозначениях ожидаемый выигрыш налогоплательщика равен

$$U_1(\mu, \nu) = \mu\,[\nu\cdot(-1) + (1-\nu)\cdot 1] + (1-\mu)\,[\nu\cdot 0 + (1-\nu)\cdot 0] = \\ = \mu\,(1-2\nu),$$

а ожидаемый выигрыш инспектора равен

$$U_2(\mu, \nu) = \nu\,[\mu\cdot 1 + (1-\mu)\cdot(-1)] + (1-\mu)\,[\mu\cdot 0 + (1-\mu)\cdot 0] = \\ = \nu\,(2\mu - 1).$$

Если вероятность проверки мала ($\nu < 1/2$), то налогоплательщику выгодно не платить налог, т.е. выбрать $\mu = 1$. Если вероятность проверки велика, то налогоплательщику выгодно заплатить налог, т.е. выбрать $\mu = 0$. Если же $\nu = 1/2$, то налогоплательщику все равно, платить налог или нет, он может выбрать любую вероятность $\mu$ из интервала $[0, 1]$. Таким образом, отображение отклика налогоплательщика имеет вид:

$$\mu(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } \nu < 1/2 \\ [0, 1], & \text{если } \nu = 1/2 \\ 0, & \text{если } \nu > 1/2. \end{cases}$$

Рассуждая аналогичным образом, найдем отклик налогового инспектора:

$$\nu(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu < 1/2 \\ [0, 1], & \text{если } \mu = 1/2 \\ 1, & \text{если } \mu > 1/2. \end{cases}$$

Графики отображений отклика обоих игроков представлены на Рис. 5. По осям на этой диаграмме откладываются вероятности ($\nu$ и $\mu$ соответственно). Они имеют единственную общую точку $(1/2, 1/2)$. Эта точка соответствует равновесию Нэша в смешанных стратегиях. В этом равновесии, как это всегда бывает в

---

[17] Если сигналы , наблюдаемые игроками, статистически зависимы, то это может помочь игрокам скоординировать свои действия. Это приводит к концепции *коррелированного равновесия*.

[18] Впоследствии мы рассмотрим, как можно достигнуть эффекта рандомизации в рамках байесовского равновесия.

равновесиях с *невырожденными* смешенными стратегиями (то есть в таких равновесиях, в которых ни одна из стратегий не выбирается с вероятностью $1$), каждый игрок рандомизирует стратегии, которые обеспечивают ему одинаковую ожидаемую полезность. Вероятности использования соответствующих чистых стратегий, выбранные игроком, определяются не структурой выигрышей данного игрока, а структурой выигрышей его партнера, что может вызвать известные трудности с интерпретацией данного решения.

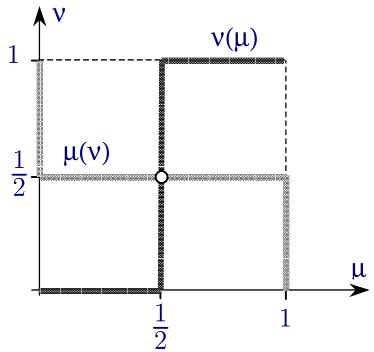


Рисунок 5. Отображения отклика в игре «Инспекция»

В отличие от равновесия в чистых стратегиях, равновесие в смешанных стратегиях в конечных играх существует всегда,[19] что является следствием следующего общего утверждения.

**Теорема 3.**
Предположим, что в игре $G=\langle I,\ \{X_i\}_{i\in I},\ \{u_i\}_{i\in I}\rangle$ у любого игрока множество стратегий $X_i$ непусто, компактно и выпукло, а функция выигрыша $u_i(\cdot)$ вогнута по $x_i$ и непрерывна. Тогда в игре $G$ существует равновесие Нэша (в чистых стратегиях).

Существование равновесия Нэша в смешанных стратегиях в играх с конечным числом чистых стратегий является следствием того, что равновесие в смешанных стратегиях является равновесием в чистых стратегиях в смешанном расширении игры.

**Следствие** (Теорема Нэша).
Равновесие Нэша в смешанных стратегиях существует в любой конечной игре.

[19] Этот результат был доказан Нэшем в статье 1950-го года, цитируемой в сноске 15.



Заметим, что существование в игре равновесия в чистых стратегиях не исключает существования равновесия в невырожденных смешанных стратегиях.

Рассмотрим в Игре 1 «Выбор компьютера» случай, когда выгоды от совместимости значительны, т.е. $a<c$ и $b<c$. В этом варианте игры два равновесия в чистых стратегиях: (IBM, IBM) и (Mac, Mac). Обозначим $\mu$ и $\nu$ вероятности выбора компьютера IBM PC первым и вторым игроком соответственно. Ожидаемый выигрыш 1-го игрока равен

$$\begin{aligned}U_1(\mu,\nu) &= \mu\,[\nu\cdot(a+c)+(1-\nu)\cdot a]+(1-\mu)\,[\nu\cdot 0+(1-\nu)\cdot c] = \\ &= \mu\,[\nu\cdot 2c-(c-a)]+(1-\nu)\,c,\end{aligned}$$

а его отклик имеет вид

$$\mu(\nu)=\begin{cases}0, & \text{если } \nu<(c-a)/2c\\ [0,1], & \text{если } \nu=(c-a)/2c\\ 1, & \text{если } \nu>(c-a)/2c\,.\end{cases}$$

Ожидаемый выигрыш 2-го игрока равен

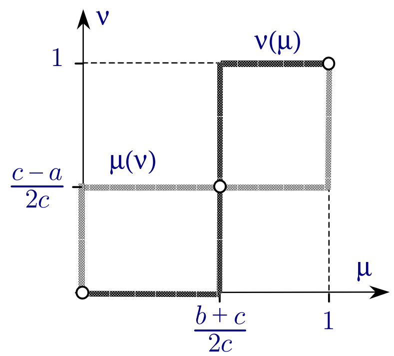


Рисунок 6. Случай, когда в игре «Выбор компьютера» существует три равновесия, одно из которых — равновесие в невырожденных смешанных стратегиях

$$\begin{aligned}U_2(\mu,\nu) &= \nu\,[\mu\cdot c+(1-\mu)\cdot 0]+(1-\nu)\,[\mu\cdot b+(1-\mu)\cdot(b+c)] = \\ &= \nu\,[\mu\cdot 2c-(b+c)]+b+(1-\mu)\,c,\end{aligned}$$

а его отклик имеет вид

$$\nu(\mu)=\begin{cases}0, & \text{если } \mu<(b+c)/2c\\ [0,1], & \text{если } \mu=(b+c)/2c\\ 1, & \text{если } \mu>(b+c)/2c\,.\end{cases}$$

Графики отображений отклика и точки, соответствующие трем равновесиям изображены на Рис.6. Как видно, в рассматриваемой игре кроме двух равновесий в чистых стратегиях имеется одно равновесие в невырожденных смешанных стратегиях. Соответствующие вероятности равны

$$\mu = \frac{b+c}{2c} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{c-a}{2c}.$$

## *Приложение A*

**Теорема.**
Предположим, что в игре $G = \langle I, \{X_i\}_{i\in I}, \{u_{i0}\}_{i\in I}\rangle$ у любого игрока множество стратегий $X_i$ непусто, компактно и выпукло, а функция выигрыша $u_i(\cdot)$ вогнута по $x_i$ и непрерывна. Тогда существует равновесие Нэша.

***Доказательство.***
Докажем, что отображение отклика, $R_i(\cdot)$, каждого игрока полунепрерывно сверху и его значение при каждом $\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}$ непусто и выпукло. Непустота следует из теоремы Вейерштрасса (непрерывная функция на компакте достигает максимума).

Докажем выпуклость. Пусть $z'$, $z'' \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i})$. Очевидно, что $u(z', \boldsymbol{x}_{-i}) = u(z'', \boldsymbol{x}_{-i})$. Из вогнутости по $x_i$ функции $u_i(\cdot)$ следует, что при $\alpha \in [0, 1]$

$$u(\alpha z' + (1-\alpha)z'', \boldsymbol{x}_{-i}) \geqslant \alpha u(z', \boldsymbol{x}_{-i}) + (1-\alpha)u(z'', \boldsymbol{x}_{-i}) = \\ = u(z', \boldsymbol{x}_{-i}) = u(z'', \boldsymbol{x}_{-i}).$$

Поскольку функция $u_i(\cdot)$ достигает максимума в точках $z'$ и $z''$, то строгое неравенство здесь невозможно. Таким образом,

$$\alpha z' + (1-\alpha)z'' \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}).$$

Докажем теперь полунепрерывность сверху отображения $R_i(\cdot)$. Рассмотрим последовательность $x_i^n$ сходящуюся к $\bar{x}_i$ и последовательность $\boldsymbol{x}_{-i}^n$сходящуюся к $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i}$, причем $x_i^n \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^n)$. Заметим, что в силу компактности множеств $X_j$ $\bar{x}_i \in X_i$ и $\bar{\boldsymbol{x}}_{-i} \in X_{-i}$. Нам нужно доказать, что $\bar{x}_i \in R_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{-i})$. По определению отображения отклика

$$u(x_i^n, \boldsymbol{x}_{-i}^n) \geqslant u(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}^n) \quad \forall x_i \in X_i,\ \forall n.$$

Из непрерывности функции $u_i(\cdot)$ следует, что

$$u(\bar{x}_i, \bar{\boldsymbol{x}}_{-i}) \geqslant u(x_i, \bar{\boldsymbol{x}}_{-i}) \quad \forall x_i \in X_i.$$

Тем самым, по введенному выше определению отображения отклика, $\bar{x}_i \in R_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{-i})$.

Опираясь на доказанные только что свойства отображения $R_i(\cdot)$ и на теорему Какутани, докажем существование равновесия по Нэшу, то есть такого набора стратегий $\boldsymbol{x}^* \in X$, для которого выполнено

$$x_i^* \in R_i(\boldsymbol{x}_{-i}^*) \quad \forall\, i = 1, \ldots, n.$$

Определим отображение $R(\cdot)$ из $X$ в $X$ следующим образом:

$$R(\boldsymbol{x}) = R_1(\boldsymbol{x}_{-1}) \times \ldots \times R_n(\boldsymbol{x}_{-n}).$$

Отметим, что это отображение удовлетворяет тем же свойствам, что и каждое из отображений $R_i(\cdot)$, так как является их декартовым произведением.

Отображение $R(\cdot)$ и множество $X$ удовлетворяют свойствам, которые необходимы для выполнения теоремы Какутани. Таким образом, существует неподвижная точка отображения $R(\cdot)$:

$$\boldsymbol{x}^* \in R(\boldsymbol{x}^*).$$

Очевидно, что точка $\boldsymbol{x}^*$ есть равновесие по Нэшу. ■

## *Приложение B*

В этом приложении мы формально докажем утверждения о связи между равновесием Нэша и процедурой последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Сначала определим формально процедуру последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий. Пусть исходная игра задана как

$$G = \langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I\rangle.$$

Определим последовательность игр $\{G^{[t]}\}_{t=0,1,2,\ldots}$, каждая из которых получается из последующей игры отбрасыванием строго доминируемых стратегий. Игры отличаются друг от друга множествами допустимых стратегий:

$$G^{[t]} = \langle I, \{X_i^{[t]}\}_I, \{u_i\}_I\rangle.$$

Процедура начинается с $G^{[0]} = G$.

Множество допустимых стратегий $i$–го игрока на шаге $t$+1 рассматриваемой процедуры берется равным множеству не доминируемых строго стратегий $i$–го игрока в игре $t$-го шага. Множества не доминируемых строго стратегий будем обозначать через $ND_i$ (см. определение строго доминируемых стратегий (Определение 6, стр. 11)). Формально

$$ND_i = \{x_i \in X_i \mid \neg\, \exists\, y_i \in X_i : u_i(y_i, \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i})\ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}\}.$$

Таким образом, можно записать шаг рассматриваемой процедуры следующим образом:

$$X_i^{[t+1]} = ND_i^{[t]},$$

где $ND_i^{[t]}$ — множество не доминируемых строго стратегий в игре $G^{[t]}$.

Приведем теперь доказательства Теорем 1 и 2 (стр. 15). Теорема 1 утверждает следующее:

> Если $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в некоторой игре, то ни одна из стратегий не может быть отброшена в результате применения процедуры последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий.

Если использовать только что введенные обозначения, то Теорема 1 утверждает, что если $\boldsymbol{x}^*$ — равновесие Нэша в исходной игре $G$, то на любом шаге $t$ выполнено

$$x_i^* \in X_i^{[t]},\ \forall i \in I, \forall\, t = 1, 2, \ldots$$

или

$$\boldsymbol{x}^* \in X^{[t]},\ \forall\, t = 1, 2, \ldots\ .$$

***Доказательство Теоремы** 1*:

Пусть есть такой шаг $\tau$, что на нем должна быть отброшена стратегия $x_i^*$ некоторого игрока $i \in I$. Предполагается, что на предыдущих шагах ни одна из стратегий не была отброшена:

$$\boldsymbol{x}^* \in X^{[t]}, \forall t = 1, \ldots, \tau.$$

По определению строгого доминирования существует другая стратегия игрока $i$, $x_i' \in X_i^{[\tau]}$, которая дает этому игроку в игре $G^{[\tau]}$ более высокий выигрыш при любых выборах других игроков:

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i})\ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}^{[\tau]}.$$

В том числе, это соотношение должно быть выполнено для $\boldsymbol{x}_{-i}^*$, поскольку мы предположили, что стратегии $\boldsymbol{x}_{-i}^*$ не были отброшены на предыдущих шагах процедуры ($\boldsymbol{x}_{-i}^* \in X_{-i}^{[\tau]}$). Значит,

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}^*) > u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

Однако это неравенство противоречит тому, что $\boldsymbol{x}^*$ — равновесие Нэша. ■

Докажем теперь Теорему 2. Напомним ее формулировку:

> Если в результате последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий у каждого игрока остается единственная стратегия, $x_i^*$, то $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_m^*)$ — равновесие Нэша в этой игре.



Данная теорема относится к случаю, когда в процессе отбрасывания строго доминируемых стратегий начиная с некоторого шага $\bar{t}$ остается единственный набор стратегий, $\boldsymbol{x}^*$, т.е.

$$X_i^{[t]} = \{x_i^*\}\ ,\ \ \forall i \in I, \forall t = 1, \ldots, \bar{t}.$$

Теорема утверждает, что $\boldsymbol{x}^*$ является единственным равновесием Нэша исходной игры.

***Доказательство Теоремы** 2*:

Поскольку, согласно доказанной только что теореме, ни одно из равновесий Нэша не может быть отброшено, нам остается только доказать, что указанный набор стратегий $\boldsymbol{x}^*$ является равновесием Нэша. Предположим, что это не так. Это означает, что существует стратегия $\tilde{x}_i$ некоторого игрока $i$, такая что

$$u_i(x_i^*, \boldsymbol{x}_{-i}^*) < u_i(\tilde{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

По предположению, стратегия $\tilde{x}_i$ была отброшена на некотором шаге $\tau$, поскольку она не совпадает с $x_i^*$. Таким образом, существует некоторая строго доминирующая ее стратегия $x_i' \in X_i^{[\tau]}$, так что

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(\tilde{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i})\ \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}^{[\tau]}.$$

В том числе это неравенство выполнено при $\boldsymbol{x}_{-i} = \boldsymbol{x}_{-i}^*$:

$$u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}^*) > u_i(\tilde{x}_i, \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

Стратегия $x_i'$ не может совпадать со стратегией $x_i^*$, поскольку в этом случае вышеприведенные неравенства противоречат друг другу. В свою очередь, из этого следует, что должна существовать стратегия $x_i''$, которая доминирует стратегию $x_i'$ на некотором шаге $\tau' > \tau$, т.е.

$$u_i(x_i'', \boldsymbol{x}_{-i}) > u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i})\ \ \forall \boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}^{[\tau']}.$$

В том числе

$$u_i(x_i'', \boldsymbol{x}_{-i}^*) > u_i(x_i', \boldsymbol{x}_{-i}^*).$$

Можно опять утверждать, что стратегия $x_i''$ не может совпадать со стратегией $x_i^*$, иначе вышеприведенные неравенства противоречили бы друг другу.

Продолжая эти рассуждения, мы получим последовательность шагов $\tau < \tau' < \tau'' < \ldots$ и соответствующих допустимых стратегий $x_i', x_i'', x_i''', \ldots$, не совпадающих с $x_i^*$. Это противоречит существованию шага $\bar{t}$, начиная с которого множества допустимых стратегий состоят только из $x_i^*$. ■

## *Задачи*

1. Два игрока размещают некоторый объект на плоскости, то есть выбирают его координаты ($x$, $y$). Игрок 1 находится в точке ($x_1$, $y_1$), а игрок 2 — в точке ($x_2$, $y_2$). Игрок 1 выбирает координату $x$, а игрок 2 — координату $y$. Каждый стремиться, чтобы объект находился как можно ближе к нему. Покажите, что в этой игре у каждого игрока есть строго доминирующая стратегия.

2. Докажите, что если в некоторой игре у каждого из игроков существует строго доминирующая стратегия, то эти стратегии составляют единственное равновесие Нэша.

3. Объясните, почему равновесие в доминирующих стратегиях должно быть также равновесием в смысле Нэша. Приведите пример игры, в которой существует равновесие в доминирующих стратегиях, и, кроме того, существуют равновесия Нэша, не совпадающие с равновесием в доминирующих стратегиях.

*Найдите в следующих играх все равновесия Нэша.*

4. Игра 2 (стр. 7), выигрыши которой представлены в Таблице 9.

5. «Орехи»

Два игрока делят между собой $4$ ореха. Каждый делает свою заявку на орехи: $x_i = 1,\ 2$ или $3$. Если $x_1 + x_2 \leqslant 4$, то каждый получает сколько просил, в противном случае оба не получают ничего.

6. Два преподавателя экономического факультета пишут учебник. Качество учебника ($q$) зависит от их усилий ($e_1$ и $e_2$ соответственно) по функции

$$q = 2(e_1 + e_2).$$

Целевая функция каждого имеет вид

$$u_i = q - e_i$$

— качество минус усилия. Можно выбрать усилия на уровне $1$, $2$ или $3$.

7. «Третий лишний»

Каждый из трех игроков выбирает одну из сторон монеты: «орёл» или «решка». Если выборы игроков совпали, то каждому выдается по 1 рублю. Если выбор одного из игроков отличается от выбора двух других, то он выплачивает им по 1 рублю.

8. Три игрока выбирают одну из трех альтернатив: $A$, $B$ или $C$. Альтернатива выбирается голосованием большинством голосов. Каждый из игроков голосует за одну и только за одну альтернативу. Если ни одна из альтернатив не наберет большинство, то будет выбрана альтернатива $A$. Выигрыши игроков в зависимости от выбранной альтернативы следующие:

$u_1(A) = 2,\ u_1(B) = 1,\ u_1(C) = 0,$
$u_2(A) = 0,\ u_2(B) = 2,\ u_2(C) = 1,$
$u_3(A) = 1,\ u_3(B) = 0,\ u_3(C) = 2.$

9. Формируются два избирательных блока, которые будут претендовать на места в законодательном собрании города N-ска. Каждый из блоков может выбрать одну из трех ориентаций: «левая» (L), «правая» (R) и «экологическая» (E). Каждая из ориентаций может привлечь 50, 30 и 20% избирателей соответственно. Известно, что если интересующая их ориентация не представлена на выборах, то избиратели из соответствующей группы не будут голосовать. Если блоки выберут разные ориентации, то каждый получит соответствующую долю голосов. Если блоки выберут одну и ту же ориентацию, то голоса соответствующей группы избирателей разделятся поровну между ними. Цель каждого блока — получить наибольшее количество голосов.

10. Два игрока размещают точку на плоскости. Один игрок выбирает абсциссу, другой — ординату. Их выигрыши заданы функциями:

а) $u_x(x,y) = -x^2 + x(y + a) + y^2,\ \ u_y(x,y) = -y^2 + y(x + b) + x^2,$
б) $u_x(x,y) = -x^2 - 2ax(y + 1) + y^2,\ \ u_y(x,y) = -y^2 + 2by(x + 1) + x^2,$
в) $u_x(x,y) = -x - y/x + 1/2\, y^2,\ \ u_y(x,y) = -y - x/y + 1/2\, x^2,$
($a$, $b$ − коэффициенты).

11. «Мороженщики на пляже»

Два мороженщика в жаркий день продают на пляже мороженое. Пляж можно представить как единичный отрезок. Мороженщики выбирают, в каком месте пляжа им находиться, т.е. выбирают координату $x_i \in [0,\ 1]$. Покупатели равномерно рассредоточены по пляжу и покупают мороженое у ближайшего к ним продавца. Если $x_1 < x_2$, то первый обслуживают $(x_1 + x_2)/2$ долю пляжа, а второй — $1 - (x_1 + x_2)/2$. Будем считать, что в случае, если они расположатся в одной и той же точке ($x_1 = x_2$), покупатели поровну распределятся между ними. Каждый мороженщик стремиться обслуживать как можно большую долю пляжа.

12. «Аукцион»

Рассмотрите аукцион, подобный описанному в Игре 4, при условии, что выигравший аукцион игрок платит названную им цену.

13. Проанализируйте Игру 1 «Выбор компьютера» (стр. 6) и найдите ответы на следующие вопросы:

а) При каких условиях на параметры $a$, $b$ и $c$ будет существовать равновесие в доминирующих стратегиях? Каким будет это равновесие?

б) При каких условиях на параметры будет равновесием Нэша исход, когда оба выбирают IBM? Когда это равновесие единственно? Может ли оно являться также равновесием в доминирующих стратегиях?

14. Каждый из двух соседей по подъезду выбирает, будет он подметать подъезд раз в неделю или нет. Пусть каждый оценивает выгоду для себя от двойной чистоты в $a > 0$ денежных единиц, выгоду от одинарной чистоты — в $b > 0$ единиц, от неубранного подъезда — в 0, а свои затраты на личное участие в уборке — в $c > 0$. При каких соотношениях между $a$, $b$ и $c$ в игре сложатся равновесия вида: (0) никто не убирает, (1) один убирает, (2) оба убирают.

15. Предположим, что в некоторой игре двух игроков, каждый из которых имеет 2 стратегии, существует единственное равновесие Нэша. Покажите, что в этой игре хотя бы у одного из игроков есть доминирующая стратегия.

16. Каждый из двух игроков $(i = 1, 2)$ имеет по 3 стратегии: $a$, $b$, $c$ и $x$, $y$, $z$ соответственно. Взяв свое имя как бесконечную последовательность символов типа *иваниваниван...*, задайте выигрыши первого игрока так: $u_1(a, x)$ = «и», $u_1(a, y)$ = «в», $u_1(a, z)$ = «а», $u_1(b, x)$ = «н», $u_1(b, y)$ = «и», $u_1(b, z)$ = «в», $u_1(c, x)$ = «а», $u_1(c, y)$ = «н»,



$u_1(c, z)$ = «и». Подставьте вместо каждой буквы имени ее номер в алфавите, для чего воспользуйтесь Таблицей 11. Аналогично используя фамилию, задайте выигрыши второго игрока, $u_2(.)$.

1) Есть ли в Вашей игре доминирующие и строго доминирующие стратегии? Если есть, то образуют ли они равновесие в доминирующих стратегиях?

2) Каким будет результат последовательного отбрасывания строго доминируемых стратегий?

3) Найдите равновесия Нэша этой игры.

Таблица 11

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | а | б | в | г | д | е | ё | ж | з |
| 1 | и | й | к | л | м | н | о | п | р | с |
| 2 | т | у | ф | х | ц | ч | ш | щ | ъ | ы |
| 3 | ь | э | ю | я | | | | | | |

17. Составьте по имени, фамилии и отчеству матричную игру трех игроков, у каждого из которых по 2 стратегии. Ответьте на вопросы предыдущей задачи.

18. Заполните пропущенные выигрыши в следующей таблице так, чтобы в получившейся игре...

(0) не было ни одного равновесия Нэша,

(1) было одно равновесие Нэша,

(2) было два равновесия Нэша,

(3) было три равновесия Нэша,

(4) было четыре равновесия Нэша.

Таблица 10

| | |
|---|---|
| ?; 1 | 2; ? |
| 4; ? | ?; 0 |

19. 1) Объясните, почему в любом равновесии Нэша выигрыш $i$-го игрока не может быть меньше, чем

$$\min_{\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}} \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}).$$

2) Объясните, почему в любом равновесии Нэша выигрыш $i$-го игрока не может быть меньше, чем

$$\max_{x_i \in X_i} \min_{\boldsymbol{x}_{-i} \in X_{-i}} u_i(x_i, \boldsymbol{x}_{-i}).$$

20. Задача относится к свойствам **антагонистических игр двух лиц**. Антагонистической игрой двух лиц называется игра, в которой сумма выигрышей обоих игроков постоянна:

$$u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = C.$$

(В частном случае, когда $C = 0$, такая игра **называется игрой с нулевой суммой**.)

Объясните, почему множество седловых точек функции $u_1(x_1, x_2)$ в антагонистической игре двух лиц совпадает с множеством равновесий Нэша.

(Напомним, что **седловой точкой** функции $u_1(x_1, x_2)$, называют такую точку $(x_1^*, x_2^*) \in X_1 \times X_2$, что для любых $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$ выполнено

$$u_1(x_1, x_2^*) \leqslant u_1(x_1^*, x_2^*) \leqslant u_1(x_1^*, x_2).)$$

Проверьте, что в следующих играх нет равновесия Нэша в чистых стратегиях. Найдите равновесие Нэша в смешанных стратегиях.

21. Докажите, основываясь на результатах двух предыдущих задач, что в антагонистической игре двух лиц равновесие Нэша (в чистых стратегиях) существует тогда и только тогда, когда

$$\min_{\boldsymbol{x}_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} u_1(x_1, x_2) = \max_{x_1 \in X_1} \min_{\boldsymbol{x}_2 \in X_2} u_1(x_1, x_2).$$

22. «Орел или решка»

Первый из двух игроков прячет монетку, положив ее по своему выбору вверх орлом или решкой. Второй игрок должен угадать, как лежит монетка. Если второй игрок угадает, то первый должен отдать ему рубль, в противном случае он должен отдать первому рубль.

23. «Камень - ножницы – бумага»

Два игрока играют в следующую игру. Каждый называет один из трех предметов: «камень», «ножницы» или «бумага». Игрок, назвавший камень, выигрывает игрока, назвавшего ножницы (ножницы тупятся о камень), игрок, назвавший ножницы, выигрывает игрока, назвавшего бумагу (ножницы режут бумагу), а игрок, назвавший бумагу, выигрывает игрока, назвавшего камень (камень можно завернуть в бумагу). Выигравший игрок получает $1$, проигравший получает $-1$. Если названные предметы совпали, то каждый игрок получает $0$.

24. Идет война между синими и красными. Генерал синих хочет занять город красных, имея две роты. К городу можно подойти по одной из двух дорог. Генерал синих каждую свою роту может послать по любой из дорог. Генерал красных располагает тремя ротами и может приказать любой роте оборонять любую дорогу. Синие займут город в том случае, если на одной из дорог у них будет больше рот, чем у красных. При этом синие получат $1$, а красные — $-2$. Если синие не займут город, то выигрыши составят $-1$ и $1$ соответственно.

25. В некоторой игре двух игроков, каждый из которых имеет 2 стратегии, у каждого из игроков все выигрыши различны, и существует ровно два равновесия Нэша. Покажите, что в этой игре есть еще равновесие в невырожденных смешанных стратегиях.

## *2. Динамические игры с совершенной информацией*

Многие ситуации, включающие взаимодействие индивидуумов, являются по своему смыслу динамическими. Люди взаимодействуют друг с другом во времени и действуют, реагируя на те решения, которые ранее приняли другие. Другими словами, принимая решения, каждый игрок располагает определенной информацией о решениях, принятых другими игроками, что предполагает очередность принятия решений (ходов).

**Динамической** будем называть такую игру, в которой каждый игрок может сделать несколько ходов и по крайней мере один из игроков, делая ход, знает, какой ход сделал другой игрок (возможно, он сам). В этой ситуации он стоит перед *свершившимися фактами* (уже сделанными ранее и известными ему ходами) и должен учитывать их при выборе своих действий.

Приведем пример динамической игры.

**Игра 7.** *«Террорист»*

В самолет, который должен лететь из Майами в Нью-Йорк, сел террорист. Террорист требует, чтобы пилот летел на Кубу, угрожая в противном случае взорвать самолет. Предположим, что террорист не может определить, куда действительно летит самолет. Первый ход в этой игре тогда делает пилот. Он может лететь либо на Кубу, либо в Нью-Йорк. Если пилот посадит самолет на Кубе, то его выигрыш составит –1, а выигрыш террориста составит 1. Если же самолет сядет в Нью-Йорке, то делает свой ход террорист. Он может либо взорвать бомбу, либо не

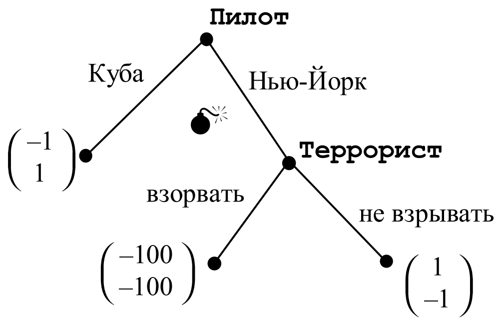


Рисунок 7. Игра «Террорист»

взрывать. Если бомба взорвется, то выигрыши обоих игроков составят –100, в противном случае выигрыш пилота составит 1, а выигрыш террориста составит –1. ⇦

Данную игру удобно представить в виде диаграммы, изображающей **дерево игры** (см. Рис. 7).[20]

Решение игры можно найти, в предположении, что игроки рациональны и что рациональность и структура игры являются общеизвестными фактами. При этом естественно воспользоваться методом **обратной индукции**.

В соответствии с этим методом игру «разматывают» с конца. Рассмотрим последнюю вершину игры, в которой один из игроков делает выбор. В данном случае нам надо спрогнозировать как

[20] Нам удобнее изображать дерево «кроной вниз». Сам термин *дерево* взят из теории графов.



поступит террорист, оказавшись в Нью-Йорке. От решения террориста в этой ситуации (вершине) зависит исход игры, поскольку пилот уже сделал свой ход, и не может «взять обратно». Если террорист рационален, то он примет решение не взрывать бомбу, поскольку –1 больше –100. Таким образом, действия террориста можно однозначно предсказать.

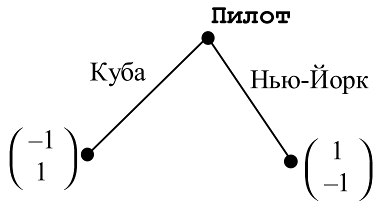


Рисунок 8. Ситуация выбора пилота

Поскольку, как мы предположили, рациональность террориста является общим знанием, то пилот может «просчитать» действия террориста и, тем самым, будет знать, что случиться, если он прилетит в Нью-Йорк.

Чтобы было более понятно, какой выбор стоит перед пилотом, удобно частично «свернуть» дерево игры, учитывая то, что действия террориста в Нью-Йорке известны. Полученная усеченная (редуцированная) игра показана на Рис. 8.

В этой игре действия пилота несложно предсказать — он полетит в Нью-Йорк, поскольку предпочитает выигрыш 1 выигрышу –1. Таким образом, исход игры однозначен: пилот посадит самолет в Нью-Йорке, а террорист не станет взрывать бомбу.

Изобразим полученное решение на дереве (см. Рис. 9). Те действия, которые были выбраны соответствующим игроком в каждой из вершин, изобразим двойными линиями. Исход игры определяется траекторией, состоящей из выбранных действий,

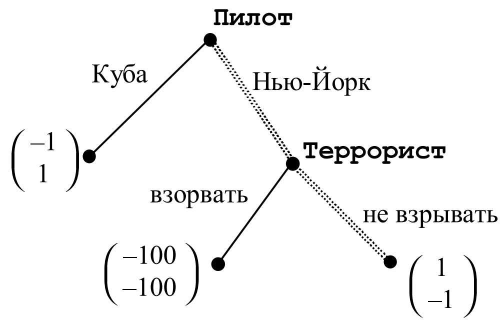


Рисунок 9. Решение игры «Террорист»

и идущей из начальной вершины в одну из конечных вершин.[21]

В данном случае мы рассмотрели **игру с совершенной информацией**, то есть такую игру, в которой каждый игрок, делая выбор, знает всю предыдущую историю игры, или, если говорить с точки зрения представления игры в виде дерева, каждый игрок знает, в какой из возможных ситуаций (вершин дерева) он находится.

Представление игры в виде дерева соответствует **развернутой форме** игры.[22] В дальнейшем мы увидим, как можно представить динамическую игру в нормальной форме. А сейчас перечислим, что должно включать описание динамической игры (с совершенной информацией) в развернутой форме:

✦ множество вершин дерева игры, в том числе одну начальную вершину;

✦ для каждой вершины, кроме начальной, — единственную вершину, которая непосредственно ей предшествует; при этом не должно быть циклов, то есть цепь предшествующих вершин, построенная из любой вершины, должна заканчиваться в начальной вершине (что предполагает, в том числе, отсутствие циклов);

✦ множество игроков;

✦ для каждой вершины, кроме конечных, — единственного игрока, которому принадлежит ход в данной вершине;

✦ для каждой конечной вершины, то есть такой, которая не предшествует ни одной другой вершине, — вектор выигрышей всех игроков.

[21] Предсказанный исход игры кажется довольно странным. Ведь вполне естественно, что пилот будет опасаться, что террорист все-таки взорвет самолет. Данный исход, однако, полностью соответствует описанию игры, а также сделанным предположениям. Можно сделать игру более реалистичной, если добавить возможность того, что может встретиться террорист, которому в соответствии с его целевой функции будет выгодно взорвать бомбу. Такую игру мы рассмотрим в дальнейшем, в параграфе, посвященном так называемым *байесовским* динамическим играм.

[22] Как и нормальная форма игры, развернутая форма была впервые в явном виде описана Дж. фон Нейманом (См. ссылки в сноске 8). См также Kuhn, H. W. (1953), "Extensive Games and the Problem of Information," pp. 193-216 in *Contributions to the Theory of Games*, Volume II (*Annals of Mathematics Studies*, **28**) (H.W. Kuhn and A. W. Tucker, eds.), Princeton: Princeton University Press.

(Если в игре есть случайные ходы природы, то следует также задать распределение вероятностей на множестве всех возможных ходов природы.)

Первые два пункта здесь соответствуют описанию дерева игры.

Действие в этой конструкции однозначно задается парой непосредственно следующих одна за другой вершин. Для каждой вершины можно определить множество действий, которые можно осуществить, находясь в данной вершине. Множество возможных действий связано однозначным соответствием с множеством вершин, которые непосредственно следуют за данной вершиной (т.е. которым непосредственно предшествует данная вершина), то есть каждое выбранное действие приводит в одну и только в одну вершину.

Каждой вершине в игре с совершенной информацией соответствует единственная **предыстория** — то есть последовательность действий, которая приводит из начальной вершины в данную вершину.

В случае, когда в динамической игре участвуют два игрока, и игра происходит в 2 этапа, то обратную индукцию удобно провести на основе функции отклика 2-го игрока на действия 1-го. Следующая игра иллюстрирует использование этого приема.

**Игра 8** («*Рэкет*»)[23]

Рэкетиры выбирают, какую долю $\alpha$ ($\alpha \in [0,1]$) выручки отбирать у фирмы. Они при этом максимизируют $\alpha p y$, где $p$ — цена, $y$ — выпуск фирмы. Фирма имеет квадратичную функцию издержек, так что ее прибыль (выигрыш) равна

$$(1-\alpha) p y - y^2.$$

Фирма максимизирует прибыль при ограничении $y \geqslant 0$. Рэкетиры делают ход первыми. Зная, какую долю выручки они хотят отбирать, фирма выбирает уровень выпуска. ⇦

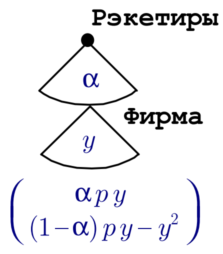


Рисунок 10. Игра «Рэкет»

[23] Можно интерпретировать игру несколько по другому: вместо рэкетиров рассматривать государство, устанавливающее ставку налога.

На Рисунке 10 изображена структура описанной игры. Поскольку множества возможных действий игроков в рассматриваемой игре не конечны (например, у рэкетиров — интервал $[0, 1] \in \mathbb{R}$), то на рисунке они изображены в виде секторов. При этом каждой точки верхнего сектора, соответствующего выбору $\alpha$, начинается некий сектор, соответствующий выбору $y$. На рисунке представлен лишь один из таких нижних секторов. Поскольку в данной игре имеется бесконечное множество (континуум) действий и исходов, на диаграмме уместно представить способы вычисления выигрышей для выбранных действий игроков как функции от действий игроков.

Рэкетиры, зная функцию выигрыша фирмы, могут определить, как скажется на ее выпуске выбор ими экспроприируемой доли выручки этой фирмы. Для того, чтобы предсказать объем выпуска, им необходимо решить задачу фирмы: максимизировать прибыли по $y$ при заданном $\alpha$. Условия первого порядка такой задачи имеют вид:

$$(1-\alpha)\,p - 2y = 0.$$

Если $\alpha < 1$, то $y > 0$. Поскольку функция прибыли вогнута, то условие первого порядка является достаточным, т.е. определяемый на его основе объем выпуска фирмы является оптимальным. При $\alpha = 1$ получаем решение $y = 0$. Таким образом, рэкетиры могут вывести уравнение оптимального выпуска фирмы как функции доли $\alpha$:

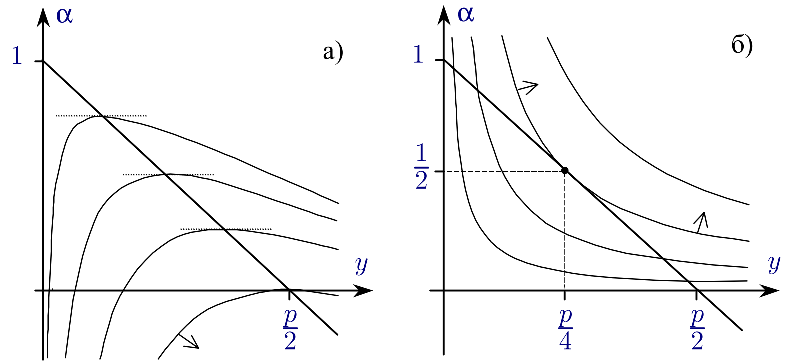


Рисунок 11. (а) Получение функции отклика фирмы. (б) Выбор рэкетирами оптимальной отбираемой доли.



$$y(\alpha) = \frac{(1-\alpha)\,p}{2}.$$

Зная эту функцию отклика, рэкетиры максимизируют свою целевую функцию,[24] т.е. решают следующую задачу

$$\alpha\, p\, y(\alpha) \to \max_{\alpha \in [0,1]}.$$

или, после подстановки $y(\alpha)$,

$$\frac{p^2}{2} \cdot (1-\alpha)\,\alpha \to \max_{\alpha \in [0,1]}.$$

Максимум достигается при $\alpha = 1/2$, то есть рэкетиры будут отбирать у фирмы половину выручки. При этом выпуск фирмы составит $p/4$. Графически поиск решения представлен на Рис. 11.

Мы рассмотрели здесь примеры игр, в которых каждый раз при использовании обратной индукции оптимальный выбор единственен. Если это не так, процесс поиска решения разветвляется — решение будет зависеть от того, какую именно альтернативу из тех, которые дают игроку одинаковый выигрыш, выберет этот игрок. На Рисунке 12 показано использование обратной индукции в такой игре. В этой игре обратная индукция дает два решения: ($L_1$, $R_2$) и ($L_2$, $R_1$).

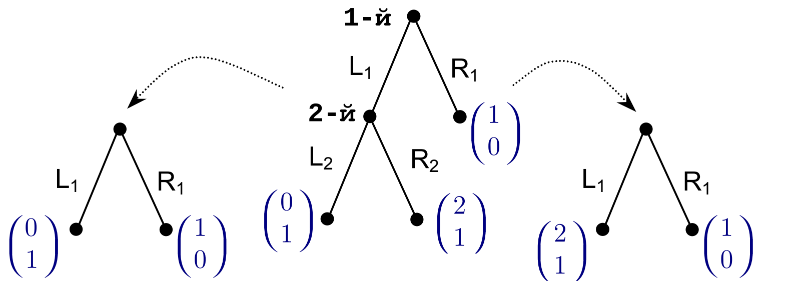


Рисунок 12. Разветвление решения при использовании обратной индукции

Если выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то неоднозначности при использовании обратной индукции не возникает, поэтому решение должно быть единственным.

[24] В моделях налогообложения аналог функции $\alpha p\, y(\alpha)$ известен как кривая Лаффера.

**Теорема 4.**
В конечной игре с совершенной информацией алгоритм обратной индукции дает хотя бы одно решение.
Если, кроме того, выигрыши всех игроков во всех конечных вершинах различны, то такое решение единственно.

Идея доказательства теоремы состоит в том, что задача оптимизации на конечном множестве альтернатив всегда имеет хотя бы одно решение; если же целевая функция принимает различные значения на множестве альтернатив, то решение этой задачи единственно. Кроме того, каждая из редуцированных игр, получаемых с помощью обратной индукции, будет конечной и с различными выигрышами, если выигрыши были различными в исходной игре.

Мы рассмотрели, как находить решение динамической игры с совершенной информацией с помощью обратной индукции.

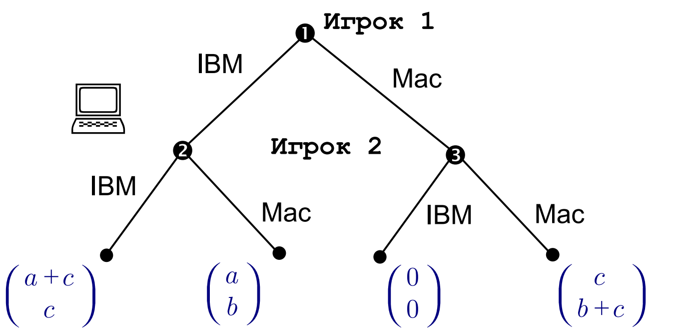


Рисунок 13. Динамический вариант игры «Выбор компьютера»

Другой подход состоит в том, чтобы применить к динамической игре концепцию равновесия Нэша, так же, как мы применяли ее к статическим играм.

Для того, чтобы это сделать, следует записать динамическую игру в нормальной форме. Как мы помним, описание игры в нормальной форме состоит из задания (1) множества игроков, (2) множества стратегий каждого игрока и (3) функции выигрыша каждого игрока на множестве исходов.

Множество игроков, конечно, должно быть одним и тем же в нормальной форме и в развернутой форме игры. Прежде всего уточним понятие стратегии для игр такого типа.

В игре в развернутой форме (чистая) стратегия — это полный план действий игрока: что он будет делать в каждой из вершин, в которой ход принадлежит ему. Это должен быть действительно *полный* план, то есть в нем должно быть определено, что игрок выберет в *любой* своей вершине, даже если из каких-либо соображений ясно, что процесс игры вряд ли может привести в эту вершину. То есть это должен быть настолько полный план, что доверенное лицо игрока может использовать его в качестве инструкции, будучи уверенным, что его поведение будет совпадать с поведением самого игрока.

Процесс игры для динамической игры в нормальной форме можно условно представить себе следующим образом. Каждый игрок до начала игры сообщает выбранную им стратегию организатору игры. Организатор, руководствуясь этими стратегиями, осуществляет за игроков их ходы. Когда последовательность ходов приведет организатора в конечную вершину, он раздает всем игрокам выигрыши, соответствующие этой конечной вершине. При такой интерпретации мы, по сути дела, имеем *статическую* игру в которой выигрыши определяются с помощью описанного только что алгоритма.

Проиллюстрируем, как на основе развернутой формы динамической игры получить ее нормальную форму, на примере динамического варианта Игры 1 «Выбор компьютера» (стр. 6). Предположим, что 1-й игрок выбирает себе компьютер первым. Дерево такой игры представлено на Рисунке 13.

Вершины на дереве пронумерованы для удобства обозначения альтернатив в разных вершинах. Игрок 1 имеет в этой игре две стратегии, совпадающие с альтернативами в вершине ❶. Игрок 2 имеет 4 стратегии. Каждая его стратегия определяет действия в двух вершинах: ❷ и ❸. Таким образом, 2-го игрок имеет следующие стратегии: (❷IBM, ❸IBM), (❷IBM, ❸Mac), (❷Mac, ❸IBM), (❷Mac, ❸Mac). В Таблице 12 представлена та же игра в нормальной форме.

Таблица 12

| | | Игрок 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | ❷IBM ❸IBM | ❷IBM ❸Mac | ❷Mac ❸IBM | ❷Mac ❸Mac |
| Игрок 1 | ❶IBM | $\underline{a+c}$, $\underline{c}$ | $\underline{a+c}$, $\underline{c}$ | $\underline{a}$, $b$ | $a$, $b$ |
| | ❶Mac | $0$, $0$ | $c$, $\underline{b+c}$ | $0$, $0$ | $\underline{c}$, $\underline{b+c}$ |

План, соответствующий, например, второй из указанный стратегий, второй игрок формулирует следующим образом: я выберу IBM, если первый игрок выберет IBM и Mac, если первый игрок выберет Mac.

Можно заметить, что нормальная форма динамического варианта игры более сложна, чем нормальная форма статического варианта игры (см. Таблицу 1). В игре с тремя типами компьютеров у 2-го игрока было бы уже 9 стратегий. Еще более сложна нормальная форма динамической игры, в которой у игроков — бесконечное множество стратегий.

Для нормальной формы игры естественным решением, как мы уже видели, является равновесие Нэша. Сравним равновесия Нэша с результатом применения метода обратной индукции. По видимому, содержательно наиболее интересен случай, когда $a < c$ и $b < c$.

Сначала разберем, что предсказывает обратная индукция. При сделанных предположениях о параметрах игры можно предсказать, что 2-й игрок в вершине ❷ выберет IBM, поскольку $c < b$ (он совместимость ценит больше, чем использование компьютера любимого типа), а в вершине ❸ выберет Макинтош, поскольку $b + c > 0$. В редуцированной игре 1-й игрок должен сделать выбор между выигрышами $a + c$ (IBM) и $c$ (Макинтош). Он выберет IBM. Таким образом, обратная индукция предсказывает, что игроки выберут следующие стратегии:

1-й — ❶IBM,

2-й — (❷IBM, ❸Mac).

В Таблице 12 подчеркнуты оптимальные отклики игроков на стратегии, выбранные партнером. Из таблицы видно, что в рассматриваемой игре есть 3 равновесия Нэша. Только одно из этих равновесий совпадает с решением, полученным обратной индукцией. Указанная ситуация является типичной, т.е. решение, полученное методом обратной индукции всегда является равновесием по Нэшу, что показывает следующая теорема.



**Теорема 5.**
В игре с совершенной информацией (и конечным числом ходов) любое решение, полученное методом обратной индукцией, является равновесием по Нэшу.

Опишем идею доказательства данной теоремы. В доказательстве мы используем следующий очевидный факт:

Пусть дан некоторый набор стратегий. Если делать ходы на основе этих стратегий, то каждой вершине соответствует одна и только одна траектория (цепь ходов), соединяющая ее с одной из конечных вершин. Можно сопоставить любой вершине единственный набор выигрышей, взяв его из той конечной вершины, в которой заканчивается соответствующая ей траектория.

Предположим, что набор стратегий, полученный обратной индукцией, $(s_1, \ldots, s_m)$, не является равновесием Нэша. Это означает, что у некоторого игрока $i$ существует стратегия $\tilde{s}_i \neq s_i$, которая может дать ему более высокий выигрыш при тех же стратегиях других игроков, $s_{-i}$. Набору стратегий $(\tilde{s}_i, s_{-i})$ соответствует некоторая альтернативная траектория игры, идущая из начальной вершины. Можно рассмотреть эту траекторию, начиная с конечной вершины. В какой-то из вершин на данной траектории выигрыш $i$-го игрока, соответствующий стратегиям $(s_i, s_{-i})$, должен оказаться ниже выигрыша, соответствующего стратегиям $(\tilde{s}_i, s_{-i})$. Это не может случиться впервые в вершине, где ход принадлежит какому-либо другому игроку, поскольку стратегии остальных игроков не меняются. Но если ход в такой вершине принадлежит $i$-му игроку, то он должен был в этой вершине сделать выбор соответствующий стратегии $\tilde{s}_i$, а не выбор, соответствующий стратегии $s_i$, поскольку это ему более выгодно. Это противоречит рациональности, заложенной в алгоритме обратной индукции.

Вообще говоря, не любое равновесие по Нэшу можно получить методом обратной индукции, что видно из рассматриваемого примера. Важно понять, почему это так.

Рассмотрим, например, равновесие ❶Mac и (❷Mac, ❸Mac) (Рис. 13, стр. 26). Содержательно его можно интерпретировать следующим образом: 2-й игрок угрожает 1-му игроку тем, что он выберет Макинтош в случае, если тот выберет IBM; под влиянием этой угрозы 1-й игрок выбирает Макинтош. Но такая ситуация противоречит предположению о рациональности, на которое опирается метод обратной индукции. Действительно, если 2-й игрок окажется в точке ❷, то предпочтет выбрать IBM. Поскольку 1-й игрок знает о том, что второй игрок рационален, он не поверит этой (пустой) угрозе. Таким образом, рассматриваемый набор стратегий вряд ли является естественным решением игры. Другое «добавочное» равновесие, ❶IBM и (❷IBM, ❸IBM), не имеет столь же интересной интерпретации, но вызывает аналогичные подозрения по поводу своей обоснованности.

Таким образом, можно сказать, что равновесия по Нэшу, которые не могут быть получены методом обратной индукции, не совместимы в данном случае с гипотезой рациональности и оказываются «лишними». Как уже было сказано, это типичная ситуация в динамических играх. Как ее можно объяснить? Сделаем по этому поводу два замечания:

★ При представлении динамической игры в нормальной форме теряется информация о последовательности ходов и информации, доступной игрокам на каждом ходе.[25]

★ Сам способ записи динамической игры в нормальной форме, как он описан выше, заключает в себе предположение, что игроки выбирают свои стратегии до начала игры *раз и навсегда* и уже не меняют их в дальнейшем в ходе игры.

Напрашивается вывод, что концепция равновесия по Нэшу в случае динамических игр вообще говоря, не дает удовлетворительного прогноза исхода игры и поэтому ее требуется каким-то образом усилить. Укажем способ такого усиления.[26]

Предположим, что несколько ходов в игре уже сделано. Можно рассматривать оставшуюся часть игры как самостоятельную игру. Выбранные игроками стратегии предписывают, что в этой оставшейся части игры игроки будут действовать строго определенным образом. Однако такое поведение может оказаться

[25] В дальнейшем мы увидим, как из нормальной формы получить развернутую форму. При двойном преобразовании получается, что полученная развернутая форма не совпадает с исходной развернутой формой.

[26] По-английски процесс избавления от «лишних» равновесий называют refinement — усовершенствование, уточнение. Особенно много способов уточнения равновесий предложено для динамических игр с несовершенной и/или неполной информацией, о которых пойдет речь ниже.

невыгодно игрокам — они могут предпочесть изменить свои выборы. С этой точки зрения естественным представляется требование динамической согласованности:

*Равновесные стратегии должны быть такими, чтобы ни у одного из игроков не было стимула менять их в процессе игры.*

Часть игры, начинающаяся в некоторой вершине и включающая в себя все, что следует за этой вершиной, в теории игр называют подыгрой.

**Определение 10.**

**Подыгра** игры $G$, где $G$ — игра с совершенной информацией в развернутой форме, — это игра, построенная на основе исходной игры. Начальной вершиной подыгры служит любая вершина исходной игры, кроме конечных. В подыгру входят все вершины, следующие за ее начальной вершиной. Выигрыши в подыгре совпадают с выигрышами в соответствующих конечных вершинах полной игры.

**Собственная подыгра** — это подыгра, начальная вершина которой не совпадает с начальной вершиной полной игры.

В рассматриваемой игре есть 3 подыгры, одна из них — сама игра и две собственных подыгры, начинающиеся в вершинах ❷ и ❸.

Основываясь на требовании динамической согласованности, можно ввести концепцию равновесия, которая усилила бы концепцию Нэша.

**Определение 11.**

**Совершенным в подыграх равновесием**[27] называется набор стратегий, такой что он является равновесием Нэша в полной игре, а соответствующие части этого набора стратегий являются равновесиями по Нэшу во всех собственных подыграх этой игры.

[27] Немецкий экономист Рейнгард Зельтен предложил концепцию совершенного в подыграх равновесия в статье, посвященной моделям олигополий (R. Selten (1965), "Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetrдgheit," *Zeitschrift fьr die gesamte Staatswissenschaft*, **121**, 301-24, 667-89).

Приложим данное определение к динамической игре «Выбор компьютера» (Рис. 26, стр. 26). Представим подыгру, начинающуюся в вершине ❷ в нормальной форме. Игрок 1 не осуществляет в этой подыгре выбора. Игрок 2 имеет две стратегии: ❷IBM и ❷Mac. Матрица игры представлена в Таблице 13.

В данной игре есть единственное равновесие Нэша. В нем 2-й игрок выбирает IBM. Таким образом, чтобы равновесие Нэша в исходной игре было совершенным, требуется, чтобы оно предписывало в вершине ❷ выбор IBM. Набор стратегий ❶Mac и (❷Mac, ❸Mac) не удовлетворяет этому требованию, поэтому он не может быть совершенным в подыграх равновесием.

Таблица 13

| | Игрок 2: ❷IBM | Игрок 2: ❷Mac |
|---|---|---|
| **Игрок 1** | $a+c$; $c$ | $a$; $b$ |

Во второй собственной подыгре, которая начинается в вершине ❸, в равновесии Нэша 2-й игрок выбирает Макинтош. Поэтому набор стратегий ❶IBM и (❷IBM, ❸IBM) не является совершенным в подыграх равновесием.

С другой стороны, набор ❶IBM и (❷IBM, ❸Mac) является равновесием по Нэшу в полной игре и соответствует равновесиям по Нэшу в каждой из собственных подыгр. Поэтому данный набор стратегий является совершенным в подыграх равновесием. Видим, что он совпал с тем решением, которое мы раньше получили, применив обратную индукцию. Это совпадение не является случайным, как показывает следующая теорема.

**Теорема 6**.
В игре с совершенной информацией и конечным числом ходов множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

Рассуждения, аналогичные приведенным в доказательстве предыдущей теоремы (Теоремы 5), позволяют показать, что решение, полученное обратной индукцией, составляет равновесие Нэша в каждой подыгре, то есть оно является совершенным в подыграх равновесием.

Докажем, обратное: любое совершенное в подыграх равновесие может быть получено обратной индукцией. Предположим, что это не так. Рассматривая игру, начиная с конечных вершин,



мы в таком случае найдем некоторую вершину, в которой впервые выбор одного из игроков не соответствует алгоритму обратной индукции. Это означало бы, что выбор, соответствующий равновесной стратегии этого игрока, не является оптимальным. Значит, заменив его на выбор, соответствующий обратной индукции, этот игрок мог бы получить в данной подыгре более высокий выигрыш. Другими словами, если бы сделанное предположение было верным, то у игрока нашлась бы в данной подыгре альтернативная стратегия, которая гарантирует ему более высокий выигрыш при неизменных стратегиях других игроков, что противоречит предположению о том, что стратегия является оптимальным откликом игрока.

Нормальная форма игры может быть очень громоздкой. Использование приведенной только что теоремы позволяет сильно упростить поиск совершенных в подыграх равновесий, поскольку не требуется записывать игры в нормальной форме и находить в них равновесия Нэша.

Например в игре «Рэкет», рассмотренной выше, стратегия фирмы должна указывать, как именно фирма будет реагировать на каждый из возможных уровней $\alpha$, т.е. функцию $y(\alpha)$. Поэтому процесс поиска равновесия по Нэшу по существу включает максимизацию в функциональном пространстве. Использование обратной индукции позволяет упростить эту задачу.

Следует отметить, что многие игры являются довольно сложными, и, даже применяя обратную индукцию, равновесие в них найти сложно. Характерным примером является игра в шахматы. Поскольку это конечная игра с совершенной информацией, то в ней должно существовать по край ней мере одно решение, получаемое обратной индукцией, и, соответственно, совершенное в подыграх равновесие. Тот факт, что в шахматах существует решение, известен уже давно, однако найти такое решение в настоящее время не представляется возможным даже с применением компьютера. Понятно, что если игроки обладают ограниченными способностями, то совершенное в подыграх равновесие может быть не очень реалистичным предсказанием результата игры.

В сочетании с Теоремой 4 Теоремы 5 и 6 гарантируют существование совершенного в подыграх равновесия в конечных играх с совершенной информацией. Если выигрыши различны, то имеет место и единственность совершенного в подыграх равновесия.

### *Задачи*

*В следующих играх найдите решение, используя обратную индукцию.*

1. Два школьника играют в следующую игру. Каждый из кучки, состоящей из 6 камней, берет по очереди один или два камня. Проигрывает тот, кто взял последний камень.

2. Муж и жена выбирают, провести вечер дома или у друзей, причем друзья у них разные. Выигрыши заданы следующей матрицей (Таблица 14), где $a, b, c, d > 0$ — параметры. Жена делает свой выбор первой. При каких условиях на параметры супруги проведут вечер дома вместе?

Таблица 14

| | | **муж** | |
|---|---|---|---|
| | | дома | у друзей |
| **жена** | дома | $a$, $b$ | $0$, $c$ |
| | у друзей | $d$, $0$ | $d$, $c$ |

3. Барин выбирает, какую долю $\tau$ стоимости $y$ урожая забирать у крестьянина в виде издольщины. Он при этом максимизирует функцию вида

$$\tau y - \tau^2,$$

то есть желает побольше получить, но не желает прослыть жадным, что возможно при слишком большом $\tau$ ($\tau \in [0,1]$). Крестьянин имеет целевую функцию $(1 - \tau)\, y - y^2$, то есть максимизирует прибыль по $y$ ($y \geqslant 0$) при квадратичной функции затрат.

4. Предположите, что в играх, представленных в задаче 10 предыдущего параграфа (стр. 20) игрок, выбирающий абсциссу, ходит первым.

5. «Трудовое соглашение» (В. Леонтьев)

Профсоюз заключает с фирмой контракт на несколько лет, в котором оговаривается уровень заработной платы ($w \geqslant 0$). Предполагается, что профсоюз достаточно мощный, чтобы навязать фирме любой уровень заработной платы.

Фирма в течении срока действия контракта не может изменить уровень заработной платы, но может выбирать количество нанимаемых работников ($l \geqslant 0$, в тыс. чел.). Профсоюз максимизирует следующую целевую функцию:

$$u(w,l) = wl - 2l^2,$$

где $2l^2$ — издержки работы для членов профсоюза.

Фирма максимизирует свою прибыль:

$$\pi(w,l) = 2\sqrt{l} - wl.$$

6. «Справедливый дележ пирога»

В игре участвуют $n$ игроков. Нужно разделить пирог между игроками, то есть выбрать вектор $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$.

Предлагается следующая процедура дележа. Игрок с номером $1$ режет пирог. Остальные игроки по порядку номеров берут любой из кусков по выбору. Последний кусок достается $1$-му игроку.

(1) Нарисуйте дерево игры при $n = 3$. Опишите множество стратегий каждого из игроков.

(2) Найдите совершенное в подыграх равновесие. Докажите, что справедливый дележ $\alpha_i = 1/n$ будет единственным равновесием.

7. Дополните дерево, изображенное на Рис. 14 выигрышами игроков, используя номера букв своего имени и фамилии (см. задачу 16 на стр. 21). Найдите все совершенные в подыграх равновесия в получившейся игре .

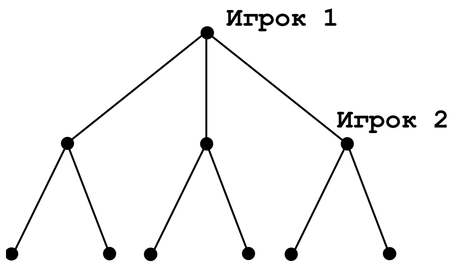

Рисунок 14

8. Рассмотрите динамическую игру, сконструированную на основе статической антагонистической игры двух лиц (см. определение в Задаче 20 преды-

дущего параграфа, стр. 22), так что игроки делают ходы по очереди (например, сначала первый, потом второй), и тот, кто ходит вторым, знает, какое решение принял тот, кто ходит первым. Пусть $(x_1^*, x_2^*)$ — седловая точка функции полезности первого игрока, $u_1(x_1, x_2)$. Докажите, что набор стратегий $(x_1^*, x_2^*)$ является совершенным в подыграх равновесием в этой игре вне зависимости от порядка ходов.

9. Пусть, как и в предыдущей задаче, на основе статической антагонистической игры двух лиц строится динамическая игра. Докажите, что делать ход вторым в общем случае (при отсутствии седловой точки) более выгодно. Предполагается, что соответствующие совершенные в подыграх равновесия существуют.

## *3. Динамические игры с несовершенной информацией*

Особенность рассматриваемых в предыдущем разделе игр — каждый игрок, перед тем, как сделать ход, полностью знает предысторию игры — выборы, сделанные ранее им и другими игроками. Другими словами игрок знает, в какой вершине дерева он оказался. В этом разделе мы рассмотрим класс игр, называемых **играми с несовершенной информацией**,[28] в которых игроки могут не знать полностью предысторию игры. Т.е., осуществляя очередной ход, они знают, что находятся в одной из вершин некоторого подмножества множества всех вершин дерева игры (так называемого **информационного множества**).

Примером игры с несовершенной информацией служит любая статическая игра. Ее можно искусственно «динамизировать», задав произвольным образом порядок ходов и определив подходящим образом информационные множества, как это сделано ниже для Игры 1 (стр. 6) «Выбор компьютера» (см. Рис. 15).

Предположим, что первый игрок ходит первым, второй — вторым. Есть две вершины, в которых ход принадлежит 2-му игроку, однако сам он не может различить, выбирая свои действия, в какой вершине он находится; другими словами, эти две вершины находятся в одном и том же информационном множестве.

[28] Мы используем кальку с английского термина *games of imperfect information*. В русскоязычной литературе использовался термин «игры с неполной информацией», но его предпочтительнее использовать для обозначения игр, которые по-английски называются *games of incomplete information*.



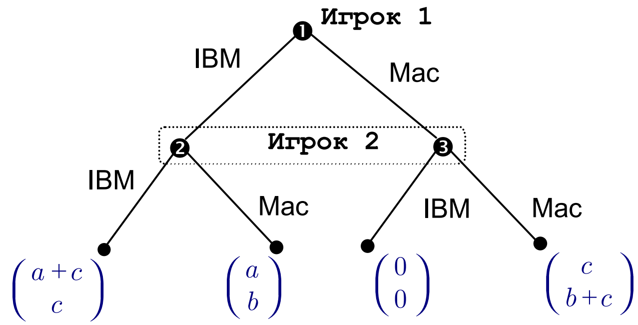


Рисунок 15. Представление статической игры «Выбор компьютера» в виде дерева

Как видим, развернутая форма игр с несовершенной информацией несколько более сложна, чем развернутая форма игр с совершенной информацией. Дополнительно к тем составляющим, которые были указаны в прежнем определении, требуется также перечислить информационные множества, которые задают разбиение множества вершин (кроме конечных). Информационные множества должны быть заданы так, чтобы каждая вершина, кроме конечных, принадлежала одному и только одному из них. Кроме того, по смыслу определения информационного множества, во всех его вершинах ход должен принадлежать одному и тому же игроку.

Дополнительно следует потребовать, чтобы множество возможных действий во всех вершинах одного и того же информационного множества были одинаковыми. В противном случае игрок мог бы по тому, какие альтернативы ему доступны, определить, в какой именно вершине он находится. Дерево игры, представленное на Рис. 15 удовлетворяет этому требованию — и в вершине ❷, и в вершине ❸ 2-й игрок выбирает между IBM и Mac.

Используя понятие информационного множества, мы можем дать формальное определение игр с совершенной информацией: в играх с совершенной информацией в каждом информационном множестве находится только одна вершина.[29]

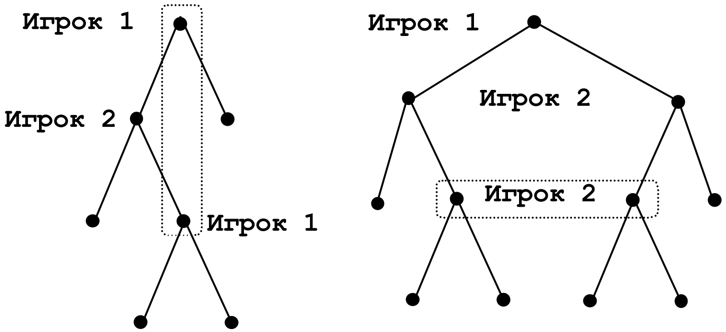


Рисунок 16. Примеры игр, не являющихся играми с идеальной памятью

В приложениях теории игр чаще всего рассматривают так называемые **игры с идеальной памятью**, то есть такие игры, в которых игроки не забывают ту информацию, которой они обладали на предыдущих ходах. Мы не будем давать формального определения таких игр. Приведем только примеры игр, в которых предположение об идеальной памяти не выполняется (см. Рис. 16).

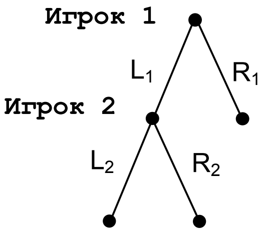


Рисунок 17

Таким образом, существуют два представления любой игры — представление в нормальной и развернутой форме. Выше мы показали, как динамическую игру с совершенной информацией представить в нормальной форме, а статическую игру — в развернутой форме. Таким образом, любую динамическую игру с совершенной информацией можно представить в нормальной форме, а затем, — на основе этой нормальной формы — построить развернутую форму соответствующей игры. Приведем пример такого построения.

Если мы представим игру на Рис. 17 в нормальной форме, то получим Таблицу 15 (для упрощения выигрыши не указаны).

[29] Это определение, по-видимому, не годится в контексте игр с неполной информацией (но это зависит от способа интерпретации).

Этой нормальной форме соответствует дерево игры, представленное на Рис. 18. Как видим, при таком «двойном переводе» частично потеряна информация о структуре игры и мы получили другую игру в развернутой форме. Очевидно, что принципиально разным играм может соответствовать одна и та же нормальная форма.

Таблица 15

| | | Игрок 2 | |
|---|---|---|---|
| | | $L_2$ | $R_2$ |
| Игрок 1 | $L_1$ | | |
| | $R_1$ | | |

Таким образом, нормальная форма игры не является в общем случае адекватной для описания динамических игр. С помощью нее можно представлять корректно только статические игры. Если операцию «двойного перевода» из развернутой формы в нормальную и обратно осуществить со статической игрой, представленной на Рис. 15, то дерево игры не поменяется (с точностью до выбора порядка ходов, что в данном случае несущественно).

Использование нормальной формы для представления статических игр вполне допустимо и даже предпочтительно, так как она более компактна.

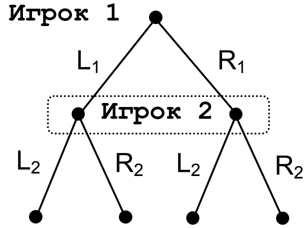


Рисунок 18

Уточним понятие стратегии для рассматриваемого класса игр.

Стратегия игрока в играх с несовершенной информацией должна, указывать, какие этот игрок выберет действия, если окажется в данном информационном множестве. Поскольку в играх с совершенной информацией в каждом из информационных множеств находится только одна вершина, то такая модификация определения стратегии полностью согласуется с данным ранее определением. Пользуясь понятием стратегии, мы можем распространить концепцию равновесия Нэша на динамические игры с несовершенной информацией. Определение ничем не будет отличаться от ранее данного.

Определение совершенного в подыграх равновесия в играх с несовершенной информацией совпадает с данным выше определением для игр с совершенной информацией. Однако, в играх с несовершенной информацией следует дать несколько другое определение подыгры. Отличие состоит в том, что подыгра может начинаться не из любой вершины. Следует потребовать, чтобы если некоторая вершина содержалась в подыгре, то в этой же подыгре содержалось и все информационное множество, содержащее данную вершину. Например в игре, дерево которой показано на Рис. 19, в вершины ❷, ❸ и ❹ не являются начальными вершинами подыгр. Таким образом, в этой игре нет *собственных* подыгр.

Заметим, что не к любой игре с несовершенной информацией можно применить алгоритм обратной индукции. Игра на Рис. 19 представляет собой как раз такую игру, в которой невозможно найти решение с помощью обратной индукции. Игрок 3 в этой игре не знает, в какой именно из двух вершин информационного множества он находится, поэтому он не может без каких-либо дополнительных предположений выбрать между двумя имеющимися альтернативами. Мы рассмотрим концепцию решения подобных игр позже, в параграфе, посвященном совершенному байесовскому равновесию.

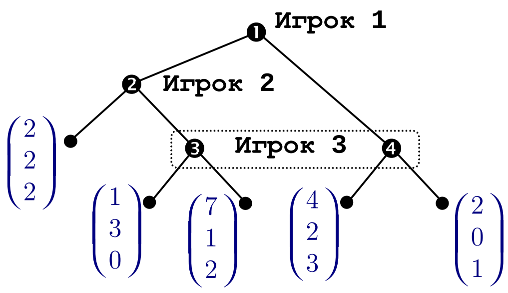


Рисунок 19.

Здесь мы рассмотрим лишь класс игр, для анализа которых можно использовать (при естественной его модификации) алгоритм обратной индукции. Эти игры можно назвать **играми с почти совершенной информацией**. Другое название — многоэтапные игры с наблюдаемыми действиями. Такие игры можно разбить на несколько этапов: $t = 1, ..., T$, каждый из которых представляет собой одну или несколько статических игр. В рамках $t$-го этапа игроки одновременно выбирают действия, причем каждый игрок знает всю предысторию, т.е. какие действия выбрали другие игроки на предыдущих этапах ($1, ..., t-1$); более того, предыстория игры является *общеизвестной*. Пример такой игры — по-



вторяющаяся конечное число раз статическая игра. Заметим, что множества стратегий некоторых игроков в этих статических играх могут быть пустыми (как, например, на первом этапе игры, представленной на Рис. 21).

Сначала при использовании обратной индукции последнем, $T$-м, этапе находятся равновесия по Нэшу всех игр этого этапа. Затем, каждая их этих игр заменяется конечной вершиной. Ей сопоставляются выигрыши, соответствующие равновесию по Нэшу (одному из равновесий, если их несколько). Тем самым мы получаем игру с $T-1$ этапом, и т.д.

Игры с почти полной информацией удобны для анализа, поскольку каждая статическая игра (соответствующего этапа) начинает одну из подыгр. Этапы можно рассматривать последовательно, а это фактически и означает, что в них не возникает трудностей с использованием обратной индукции.

Рассмотрим пример игры с почти полной информацией и использования обратной индукции для поиска решения в таких играх.

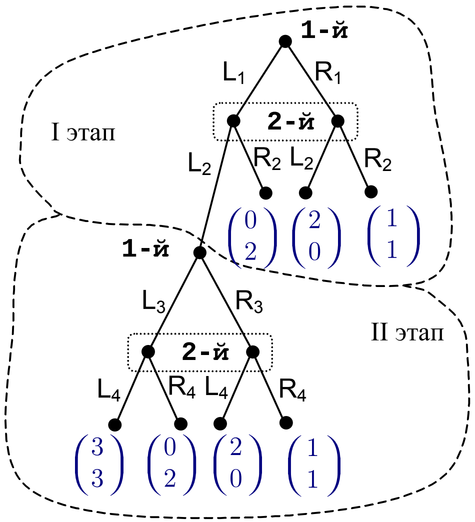


Рисунок 20. Дерево игры «Набеги на банки»

**Игра 9.** *«Набеги на банки»*

Два инвестора вложили в банк одинаковые денежные суммы (например, по 2 рубля). Банк обещает им вернуть через 3 месяца по 3 рубля. Они могут взять деньги из банка через 1, 2 или 3 месяца, однако банк сможет вернуть только половину общей суммы сделанных инвестиций, если вкладчики потребуют деньги раньше срока (через 1 или 2 месяца). При этом если оба потребуют деньги, то получат по 1 рублю, а если деньги потребует только один, то он получит 2 рубля, а другой вкладчик не сможет получить ничего. ⇦

Дерево игры показано на Рис. 20. R обозначает «забрать деньги», L — «не забирать». Игра происходит в 2 этапа, на каждом из которых вкладчики одновременно решают, забирать ли деньги. Первый этап происходит по прошествии 1 месяца после вложения денег, второй — по прошествии 2 месяцев.

Таблица 16. Игра «Набеги на банки» на втором этапе

| Игрок 1 \ Игрок 2 | $L_4$ | $R_4$ |
|---|---|---|
| $L_3$ | $\underline{3}$, $\underline{3}$ | 0, 2 |
| $R_3$ | 2, 0 | $\underline{1}$, $\underline{1}$ |

В Таблице 16 изображена статическая игра, соответствующая второму этапу. В игре имеется два равновесия по Нэшу. Применяя обратную индукцию, мы используем выигрыши, соответствующие этим равновесиям, чтобы сформулировать статическую игру, соответствующую первому этапу.

Таблица 17. Редуцированная игра «Набеги на банки» на первом этапе

| Игрок 1 \ Игрок 2 | $L_2$ | $R_2$ |
|---|---|---|
| $L_1$ | $v_1$, $v_2$ | 0, 2 |
| $R_1$ | 2, 0 | 1, 1 |

Получающаяся редуцированная игра представлена в Таблице 17. В ней выигрыши второго этапа обозначены через $v_1$ и $v_2$ соответственно.

Множество равновесий Нэша в редуцированной игре первого этапа зависит от того, какое из двух равновесий может реализоваться на втором этапе. Если игроки считают, что на втором этапе они оба заберут деньги, то им выгоднее забрать деньги на первом этапе, поскольку $v_1, v_2 = 1 < 2$. Если же игроки считают, что на втором этапе они оба оставят деньги в банке, то на первом этапе может реализоваться одно из двух равновесий Нэша, поскольку $v_1, v_2 = 3 > 2$: либо оба игрока забирают деньги, либо оба оставляют. Таким образом, обратная индукция дает три решения. В двух из этих решений происходит «набег на банк» на первом и втором этапе соответственно. Третье решение соответствует случаю, когда оба вкладчика дожидаются получения максимального выигрыша $(3, 3)$.

Использование обратной индукции в играх с почти совершенной информацией можно дополнительно обосновать тем, что для них выполнен вариант Теоремы 6.

**Теорема 6′.**
В игре с почти совершенной информацией (и конечным числом ходов) множество решений, получаемых обратной индукцией, совпадает с множеством совершенных в подыграх равновесий.

В отличие от игр с совершенной информацией, в играх с почти совершенной информацией решения в чистых стратегиях может не существовать (как, например в игре на Рис. 21). Выход из положения состоит в том, чтобы ввести в поведение игроков элемент рандомизации, по аналогии со смешанными стратегиями, которые мы рассмотрели в случае статических игр.

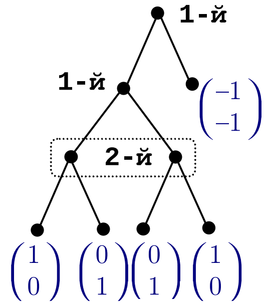


Рисунок 21. Игра, в которой нет равновесия в чистых стратегиях

Конечно, мы можем прямо перенести понятие смешанной стратегии на динамические игры, воспользовавшись представлением этих игр в нормальной форме. Согласно такой интерпретации, *смешанная стратегия* игрока — это вероятности, с которыми игрок выбирает свои чистые стратегии. В этом случае игроки рандомизируют стратегии. Однако более предпочтительной кажется другая концепция: игроки рандомизируют действия. Эта концепция лучше соответствует идеологии динамических игр.

Стратегию с рандомизацией действий принято называть **поведенческой стратегией**. Поведенческая стратегия должна указывать для каждого информационного множества, в котором ход принадлежит игроку, некоторое распределение вероятностей на множестве действий, из которых он выбирает в данном информационном множестве. При этом предполагается, что распределения вероятностей в разных информационных множествах статистически независимы.

Фундаментальный результат, принадлежащий Куну, состоит в том, что в играх с идеальной памятью использование поведенческих стратегий эквивалентно использованию смешанных стратегий (со случайным выбором чистых стратегий). Мы понимаем под эквивалентностью двух наборов стратегий то, что они порождают одно и то же распределение вероятностей на множестве конечных вершин (или, что то же самое, на множестве всех траекторий игры, начинающихся в начальной вершине). Несложно понять, что каждый набор смешанных стратегий однозначно порождает набор поведенческих стратегий, при этом оба они порождают одно и то же распределение на множестве конечных вершин. Обратное утверждение состоит в том, что для любого набора поведенческих стратегий найдется хотя бы один набор смешанных стратегий, который его порождает. В дальнейшем мы везде будем говорить о *смешанных* стратегиях, имея в виду *поведенческие* стратегии.

Алгоритм обратной индукции можно естественных образом распространить на случай случайного выбора игроками своих действий. Заметим, что в играх с совершенной информацией с различными выигрышами такая обратная индукция даст то же самое единственное решение, что и обычная обратная индукция. Смешанные стратегии в этом решении будут вырожденными: каждый игрок будет выбирать одно из действий с единичной вероятностью. По-видимому, смешанные стратегии имеет смысл рассматривать только в играх с несовершенной информацией.

Рассмотрим в качестве примера Игру 9 «Набеги на банки» (стр. 33). Как мы уже видели, в этой игре существует три равновесия в чистых стратегиях. Мы сейчас увидим, что в игре кроме того существуют равновесия в смешанных стратегиях.

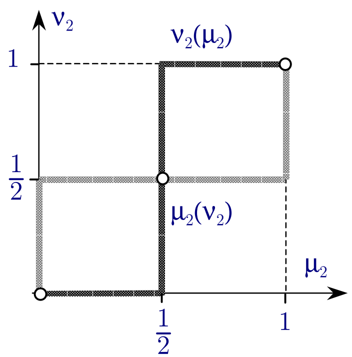


Рисунок 22. Равновесия в смешанных стратегиях второго этапа игры «Набеги на банки»

Обозначим через $\mu_1$ вероятность того, что первый вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора $L_1$), а через $\nu_1$ — вероятность того, что второй вкладчик не забирает деньги на первом этапе (вероятность выбора $L_2$). Соответствующие вероятности на втором этапе обозначим $\mu_2$ и $\nu_2$ (вероятности выбора $L_3$ и $L_4$ соот-



ветственно).

В игре второго этапа существуют три равновесия Нэша в смешанных стратегиях (см. Рис. 22). Два из этих равновесий — равновесия в вырожденных смешанных стратегиях. Есть также равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_2 = 1/2$ и $\nu_2 = 1/2$. Ожидаемые выигрыши вкладчиков составят при этом по $3/2$. Структура равновесий в редуцированной игре 1-го этапа зависит от того, какое из трех возможных равновесий второго этапа ожидают игроки. Равновесия в вырожденных смешанных стратегиях аналогичны рассмотренным выше равновесиям в игре с чистыми стратегиями. Кроме того, в редуцированной игре при $v_1, v_2 = 3$ (когда на втором этапе оба оставляют деньги в банке) существует равновесие в невырожденных смешанных стратегиях: $\mu_1 = 1/2$ и $\nu_1 = 1/2$.

## *Задачи*

1. «Раз-два-три»

Каждый из двух игроков одновременно называет одно из трех чисел: 1, 2 или 3. При совпадении второй игрок дает первому названное и совпавшее число (при несовпадении никто не платит). Дополнительно игроки получают удовольствие от участия в игре, которые они оценивают в $1/2$. Какую сумму $z$ первый игрок должен заплатить второму до начала игры, чтобы тот согласился играть? Нарисуйте дерево, описывающее данную ситуацию.

2. В игре участвуют 2 игрока. Игра состоит из двух этапов. На первом этапе игроки одновременно решают, хотят ли они участвовать во втором этапе. Если игрок говорит, что хочет участвовать во втором этапе то он платит $1. Второй этап начинается, только если оба решают участвовать во втором

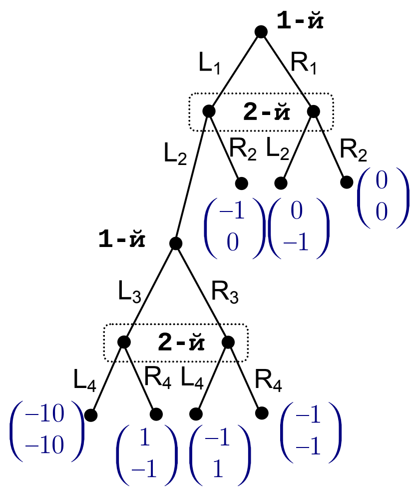


Рисунок 23

этапе, в противном случае игра заканчивается, и деньги забирает организатор игры. В игре второго этапа игроки одновременно заявляют, хотят ли они забрать имеющиеся $2. В случае их отказа, деньги достаются организатору этой игры. Если же на эти деньги претендуют оба, то между ними происходит ссора, потери от которой обо игрока оценивают выше, чем достающаяся им доля, так что выигрыш обоих — отрицательный. Полностью эта игра с указанием всех выигрышей изображена на Рис. 23. На первом этапе L обозначает «дать доллар», R — «не давать доллар». На втором этапе L обозначает «попытаться забрать доллары», R — «отказаться от долларов».

Проанализируйте эту игру и найдите в ней все совершенные в подыграх равновесия как в чистых, так и в смешанных стратегиях.

3. Найдите равновесие в смешанных стратегиях для игры, изображенной на Рис. 21 (стр. 34).

4. 50 пиратов делят добычу в 100 дукатов. Правило дележа следующее. В порядке старшинства каждый пират предлагает свою схему дележа. Если большинство пиратов (не менее половины, включая пирата, который предлагает дележ) принимает предложение, то оно выполняется и процедура дележа заканчивается. Если предложение отвергается, то пират, который его сделал, исключается из числа участвующих в дележе, и тогда настает очередь следующего по старшинству пирата предложить схему дележа между оставшимися пиратами.

Объясните, почему описанная игра является игрой с почти совершенной информацией. Как будет поделена добыча? Будет ли равновесие единственным?

## *4. Статические игры с неполной информацией*

Рассматривая статические игры, мы предполагали, что игроки в равной степени информированы о структуре игры, так что каждый из игроков знает множества возможных действий и целевые функции других игроков (более того, мы предполагали, что все это общеизвестно). На самом деле экономические субъекты всегда бывают в разной степени информированы или, другими словами, *асимметрично* информированы, поэтому многие экономические явления невозможно адекватно описать, не отказавшись от этого упрощающего предположения.

Мы рассмотрим здесь разновидность игр, в которых игроки могут не знать точно предпочтения других игроков. Предпочтения игроков в этих играх зависят от случайных событий, при этом игроки в разной степени владеют информацией о том, какое именно событие произошло. Формально это учитывается с помощью введения понятия **типа** игрока: каждый из игроков может быть нескольких типов. При этом считается, что каждый из игроков знает только свой собственный тип. Можно считать, что первый ход делает природа, выбирая типы всех игроков. Такого рода игры называют **играми с неполной информацией** (**байесовскими играми**).

Концепция игр с неполной информацией оказывается очень плодотворной, и позволяет моделировать различные ситуации, содержащие элемент случайности, которые невозможно смоделировать в рамках игр с полной информацией, которые были рассмотрены нами выше. Например, характеристики игрока могут зависеть от некоторых случайных параметров. Стратегия игрока при этом должна описывать, какие действия он выберет при каждом возможном значении параметра.

В этом параграфе мы разберем *статические* игры с неполной информацией. Динамическим играм с неполной информацией посвящен следующий параграф.

Опишем структуру статической игры с неполной информацией (статической байесовской игры).

Как и раньше, $I = \{1,\dots,m\}$ — множество игроков. В байесовских играх каждый игрок имеет несколько типов, $\theta_i \in \Theta_i$, где $\Theta_i$ — множество типов $i$-го игрока (не обязательно конечное или счетное). Предполагается, что появление того или иного типа — случайное событие. Таким образом, в описании байесовской игры должно быть задано распределение вероятностей на множестве

$$\Theta = \Theta_1\times\dots\times\Theta_m.$$

Если множества типов $\Theta_i$ конечны, то достаточно задать вероятности появления сочетаний типов $(\theta_1, \dots, \theta_m) \in \Theta$, т.е. функцию

$$\pi(\cdot)\colon \Theta \mapsto \mathbb{R}_+,$$

для которой выполнены стандартные предположения о том, что вероятности должны быть неотрицательны и их сумма должна равняться единице.

В дальнейшем мы, как правило, будем предполагать, что имеет место независимость появления типов у разных игроков (для краткости будем называть это *независимостью типов*). В таком случае достаточно задать вероятности появления каждого из типов для каждого игрока, то есть $m$ функций

$$\pi_i(\cdot) \colon \Theta_i \mapsto \mathbb{R}_+, \quad i = 1, \ldots, m,$$

таких что $\pi_i(\theta)$ — вероятность появления типа $\theta \in \Theta_i$ игрока $i$. Это случай, когда знание своего типа не дает игроку дополнительной информации о типах других игроков.

Если типы — это действительные числа, то можно считать, что дана функция распределения типов, $F(\theta_1, \ldots, \theta_m)$. Независимость типов в данном контексте означает, что функцию распределения можно представить как произведение функций распределения типов отдельных игроков

$$F(\theta_1, \ldots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{m} F_i(\theta_i).$$

Предполагается, что все типы одного и того же игрока имеют одинаковые множества действий $X_i$.[30] Выигрыш в статических байесовских играх зависит не только от выбранных игроками действий, $(x_1, \ldots, x_m) \in X$, но и от того, какие именно типы, $(\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, участвуют в игре. Предпочтения игроков заданы функциями выигрышей:

$$u_i \colon X \times \Theta \mapsto \mathbb{R},$$

где $X = X_1 \times \cdots \times X_m$.

Таким образом, описание статической байесовской игры должно включать в себя следующие составляющие:

- ✦ множество игроков;
- ✦ для каждого игрока — множество типов;
- ✦ распределение вероятностей на множествах типов;
- ✦ для каждого игрока — множество возможных действий;
- ✦ для каждого игрока — функции выигрышей.

В частном случае, когда множества типов конечны, статическая байесовская игра есть набор

$$\langle I, \{\Theta_i\}_I, \pi, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

[30] Если моделируется ситуация, в которой множества возможных действий разные у разных типов, то это можно смоделировать, введя для некоторых действий запретительно маленькие выигрыши («равные минус бесконечности»), так чтобы соответствующий тип их заведомо не стал выбирать.



Стратегии в статических байесовских играх не совпадают с действиями. В соответствии со сложившейся терминологией, стратегия игрока описывает действия *каждого* из типов этого игрока. Можно представить стратегию как функцию $s_i(\cdot)$, которая ставит в соответствие каждому типу $\theta \in \Theta_i$ некоторые действия $s_i(\theta) \in X_i$.

Естественное обобщение понятия рациональности в данном случае состоит в том, что каждый тип каждого игрока максимизирует ожидаемый выигрыш при некоторых ожиданиях относительно стратегий других игроков.[31] Поскольку игрок знает свой тип, то математическое ожидание должно быть *условным* по этому типу. (Условные вероятности в общем случае рассчитываются по формуле Байеса — отсюда и термины «байесовские игры», «байесовское равновесие»). Ожидаемый выигрыш игрока $i$, имеющего тип $\theta$ и выбравшего действия $x_i$, в предположении, что остальные игроки выбрали стратегии

$$\boldsymbol{s}_{-i}(\cdot) = (s_1(\cdot), \ldots, s_{i-1}(\cdot), s_{i+1}(\cdot), \ldots, s_m(\cdot)),$$

равен

$$U_i(\theta, x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\cdot)) = \mathsf{E}(u_i(x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}), \theta, \boldsymbol{\theta}_{-i}) \mid \theta_i = \theta),$$

где $\boldsymbol{\theta}_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m)$ — типы остальных игроков.

Если имеет место независимость типов, то условное по типу мат. ожидание совпадает с безусловным, т.е.

$$U_i(\theta, x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\cdot)) = \mathsf{E}(u_i(x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}), \theta, \boldsymbol{\theta}_{-i})).$$

Если множества типов конечны и типы независимы, то ожидаемый выигрыш рассчитывается по формуле

$$U_i(\theta, x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\cdot)) = \sum_{\boldsymbol{\theta}_{-i} \in \Theta_{-i}} \pi_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i})\, u_i(x_i, \boldsymbol{s}_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}), \theta, \boldsymbol{\theta}_{-i}),$$

где мы обозначили

$$\Theta_{-i} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_{i-1}, \Theta_{i+1}, \ldots, \Theta_m)$$

и

$$\pi_{-i}(\boldsymbol{\theta}_{-i}) = \prod_{j \neq i} \pi_j(\theta_j)$$

(вероятность того, что типы остальных игроков окажутся равными $\boldsymbol{\theta}_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \ldots, \theta_m)$).

[31] Можно задать целевые функции не для типов, а для игроков. В таком случае игрок максимизирует ожидаемую полезность, исходя из вероятности того, что он окажется того или иного типа. Оба подхода совпадают при естественном предположении, что вероятность появления любого типа не равна нулю.

Таблица 18

| | | Игрок 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Игрок 1** | | **Любит** IBM | | **Любит** Mac | | |
| | | IBM | Mac | IBM | Mac | |
| **Любит** IBM | IBM | 3; 3 | 1; 0 | 3; 2 | 1; 1 | [π] |
| | Mac | 0; 1 | 2; 2 | 0; 0 | 2; 3 | |
| **Любит** Mac | IBM | 2; 3 | 0; 0 | 2; 2 | 0; 1 | [1–π] |
| | Mac | 1; 1 | 3; 2 | 1; 0 | 3; 3 | |
| | | [π] | | [1–π] | | |

Для байесовских игр предложена концепция равновесия,[32] аналогичная равновесию Нэша в играх с полной информацией.

**Определение 12.**

Набор стратегий $(\bar{s}_1(\cdot), \ldots, \bar{s}_m(\cdot))$ является **равновесием Нэша-Байеса** (байесовским равновесием) в игре с неполной информацией, если для каждого типа $\theta \in \Theta_i$ каждого игрока $i$ действия $\bar{s}_i(\theta)$ максимизируют его ожидаемую полезность в предположении, что все другие игроки выбрали равновесные стратегии:

$$U_i(\theta, \bar{s}_i(\theta), \bar{\boldsymbol{s}}_{-i}(\cdot)) = \max_{x_i \in X_i} U_i(\theta, x_i, \bar{\boldsymbol{s}}_{-i}(\cdot))$$

Для того, чтобы введенные определения стали более понятными, проиллюстрируем их на условном примере.

**Игра 10.** «Выбор компьютера»

В игре участвуют два игрока, использующие в работе компьютеры. Каждый игрок может быть двух типов — предпочитает работать либо на IBM PC, либо на Макинтоше, причем любители IBM PC попадаются с вероятностью $\pi$ (для обоих игроков). Каждый из игроков выбирает либо IBM PC, либо Макинтош. Лишь после того, как игрок выбрал тип компьютера, он узнает, с партнером какого типа ему предстоит работать, и какой тот выбрал себе компьютер. Каждый из типов каждого из игроков оценивает пользование компьютером любимой разновидности в $1$ у.е., а пользование другим компьютером в $0$ у.е. Игроки получают дополнительный выигрыш в $2$ у.е., если выберут компьютеры одной и той же разновидности. ⇦

Игра представлена в Таблице 18.

Мы не будем полностью решать эту игру. Найдем только условия для параметра $\pi$, при которых набор стратегий «если игрок любит IBM, то оно выбирает IBM; если игрок любит Mac, то он выбирает Mac», т.е. ((IBM, Mac), (IBM, Mac)), будет равновесием Нэша-Байеса.

Рассмотрим выбор 1-го игрока, если он предпочитает IBM PC. Если он ожидает, что стратегией 2-го игрока является (IBM, Mac), то его ожидаемая полезность от выбора компьютеров IBM PC и Макинтош равна соответственно

IBM: $\pi\cdot 3 + (1-\pi)\cdot 1$,

Mac: $\pi\cdot 0 + (1-\pi)\cdot 2$.

Первый игрок такого типа выберет IBM PC, если выполнено условие

$$\pi\cdot 3 + (1-\pi)\cdot 1 \geqslant \pi\cdot 0 + (1-\pi)\cdot 2$$

или

$$\pi \geqslant 1/4.$$

Рассмотрим теперь выбор 1-го игрока, если он предпочитает Макинтош. Поскольку в равновесии он ожидает, что стратегией 2-го игрока является (IBM, Mac), то его ожидаемая полезность от выбора компьютеров IBM PC и Макинтош равна соответственно

IBM: $\pi\cdot 2 + (1-\pi)\cdot 0$,

Mac: $\pi\cdot 1 + (1-\pi)\cdot 3$.

Первый игрок такого типа выберет Макинтош, если выполнено условие

$$\pi\cdot 2 + (1-\pi)\cdot 0 \leqslant \pi\cdot 1 + (1-\pi)\cdot 3$$

или

$$\pi \leqslant 3/4.$$

[32] Концепция байесовского равновесия предложена американским экономистом венгерского происхождения Джоном Харшаньи. (Harsanyi, J. C. (1967-8), "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players," Parts I, II and III, *Management Science*, **14**, 159-182, 320-334, 486-502.

Таблица 19

| | | Посетитель A | | Посетитель B | |
|---|---|---|---|---|---|
| Вахтер a | проверять | $-1$ | $\pi_{Aa}$ | $1$ | $\pi_{Ba}$ |
| | не проверять | $0$ | | $0$ | |
| Вахтер b | проверять | $-1$ | $\pi_{Ab}$ | $1$ | $\pi_{Bb}$ |
| | не проверять | $0$ | | $0$ | |

Для второго игрока рассуждения аналогичные и приводят к тем же условиям, поскольку игроки одинаковы. Таким образом, условие

$$1/4 \leqslant \pi \leqslant 3/4$$

гарантирует, что набор стратегий ((IBM, Mac), (IBM, Mac)) будет байесовским равновесием.

Следующий пример не является полноценной игрой, поскольку выбор в нем делает только один игрок, однако он включает все те компоненты байесовской игры, о которых здесь говорилось. Этот пример показывает, как можно моделировать то, что один и тот же игрок может в зависимости от некоторых случайных обстоятельств обладать разным объемом информации. Размышления над примером позволяет «сломать» некоторые стереотипы, которые могут сложиться на основе формального определения байесовской игры.

**Игра 11.** «Вахтер»

На входе в некоторое учреждение стоит вахтер. В учреждение могут войти посетители двух типов: «свои» и «чужие» (будем их для краткости обозначать $A$ и $B$). Некоторые посетители кажутся вахтеру своими, а некоторые — чужими. Таким образом, в данной игре есть 2 типа вахтера (обозначим их соответственно $a$ и $b$). Вахтер может проверить у посетителя наличие пропуска. При этом, если посетитель окажется своим, то выигрыш вахтера составит $-1$, а если чужим, то $1$. ⇦

Матрица игры приведена в Таблице 19. Вероятность того, что свой посетитель кажется вахтеру своим обозначена $\pi_{Aa}$ и т. д. Заметим, что по смыслу игры, если вахтер достаточно опытен, то вероятности появления типов не должны быть независимыми.



Условная вероятность того, что посетитель свой, если он кажется своим, равна $\pi_{Aa}/(\pi_{Aa}+\pi_{Ba})$, а условная вероятность того, что посетитель чужой, если он кажется своим, равна $\pi_{Ba}/(\pi_{Aa}+\pi_{Ba})$. Таким образом, ожидаемый выигрыш вахтера типа **a**, если он проверяет документы, равен

$$\frac{\pi_{Aa}}{\pi_{Aa}+\pi_{Ba}}\cdot(-1)+\frac{\pi_{Ba}}{\pi_{Aa}+\pi_{Ba}}\cdot 1,$$

а если не проверяет, то $0$. Аналогично, ожидаемый выигрыш вахтера типа **b**, если он проверяет документы, равен

$$\frac{\pi_{Ab}}{\pi_{Ab}+\pi_{Bb}}\cdot(-1)+\frac{\pi_{Bb}}{\pi_{Ab}+\pi_{Bb}}\cdot 1,$$

а если не проверяет, то $0$.

Если вахтер опытен, то вероятность $\pi_{Aa}$ велика по сравнению с вероятностью $\pi_{Ba}$, а вероятность $\pi_{Ab}$ велика по сравнению с вероятностью $\pi_{Bb}$, и естественно ожидать, что вахтер будет проверять документы у тех, кто ему кажется чужими и не будет проверять документы у тех, кто ему кажется своими.

Разберем также пример, в котором множества типов являются континуумами.

**Игра 12.** «Аукцион с заявками в запечатанных конвертах»

Некий предмет продается с аукциона. Участники аукциона ($i=1,\ldots,n$), подают свои заявки, $p_i \geqslant 0$, в запечатанных конвертах. Побеждает тот, кто предложит самую высокую цену. (Если самую высокую цену предложат сразу несколько участников, то победитель определяется жребием.) Победивший участник платит заявленную цену и получает предмет. Если $i$-й участник окажется победителем, то его выигрыш составит $v_i - p_i$, где $v_i$ — ценность для него данного предмета; выигрыш всех остальных участников будет равен нулю. Известно, что оценки $v_i$ распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$ и независимы. ⇦

В данном случае можно считать, что множество типов каждого игрока совпадает с отрезком $[0, 1]$. Удобно рассматривать стратегию $i$–го игрока как функцию, ставящую в соответствие типу $v$ цену, которую он предложит, $p_i(v)$:

$$p_i(\cdot)\colon\ [0, 1] \mapsto \mathbb{R}_+.$$

Решить эту задачу непосредственно затруднительно. Можно предложить следующий путь решения: предположить, что равновесные стратегии обладают некоторыми естественными свойствами, затем вычислить, исходя из этого, равновесные стратегии и показать, что на самом деле найдено равновесие.

По смыслу задачи естественно искать симметричное равновесие, то есть такое равновесие, в котором игроки выбирают одинаковые стратегии:

$$p_i(v) \equiv p_0(v) \ \ \forall i,$$

Кроме того, предположим, что одинаковая для всех стратегия $p_0(\cdot)$ является возрастающей дифференцируемой функцией. Найдем, исходя из этих предположений, оптимальный отклик $i$–го игрока. Если этот игрок выберет цену $p$, то вероятность того, что другой игрок, $j$, предложил более низкую цену равна

$$\mathsf{Prob}(p_0(v_j) < p) = \mathsf{Prob}(v_j < p_0^{-1}(p)) = p_0^{-1}(p) = \varphi(p),$$

где мы воспользовались тем, что оценка $v_j$ равномерно распределена на $[0, 1]$, и обозначили через $\varphi(p)$ функцию, обратную к $p_0(\cdot)$. Поскольку по предположению $v_j$ распределены независимо, то события $p_0(v_j) < p$ независимы, и вероятность того, что $i$–й игрок выиграет аукцион, заявив цену $p$, равна $\varphi(p)^{n-1}$. (Здесь мы пользуемся тем, что, поскольку $p_0(\cdot)$ — возрастающая функция, то вероятность события $p_0(v_j) = p$ равна нулю.) Таким образом, ожидаемый выигрыш $i$–го игрока с оценкой $v$, предложившего цену $p$, в предположении, что все остальные игроки выбрали стратегии $p_0(\cdot)$, равен

$$\varphi(p)^{n-1}\cdot(v-p) + (1-\varphi(p)^{n-1})\cdot 0 = (v-p)\varphi(p)^{n-1}.$$

Условия первого порядка для задачи максимизации ожидаемого выигрыша имеют вид

$$(n-1)(v-p)\,\varphi(p)^{n-2}\,\varphi'(p) - \varphi(p)^{n-1} = 0$$

или

$$(n-1)(v-p)\varphi'(p) - \varphi(p) = 0.$$

В равновесии игрок, имеющий оценку $v$, должен предлагать цену $p = p_0(v)$. Подставив это в условия первого порядка, получаем:

$$(n-1)(v-p_0(v))\,\varphi'(p_0(v)) - \varphi(p_0(v)) = 0.$$

Поскольку $\varphi(\cdot)$ — функция, обратная к $p_0(\cdot)$, то

$$\varphi(p_0(v)) = v \qquad \text{и} \qquad \varphi'(p_0(v)) = \frac{1}{p_0'(v)}.$$

Получим дифференциальное уравнение

$$(n-1)\,[v-p_0(v)] - p_0'(v)\,v = 0.$$

Решением этого уравнения, как несложно проверить, является

$$p_0(v) = \frac{n-1}{n}v + \frac{C}{v^{n-1}},$$

где $C$ — константа интегрирования. Найдем эту константу. По смыслу игры $p_0(v)$ не должна превышать $v$. С другой стороны, по условию заявленная цена не может быть отрицательной. Поэтому должно выполняться граничное условие $p_0(0) = 0$, откуда $C = 0$. Таким образом, наши рассуждения приводят к стратегиям вида

$$p_0(v) = \frac{n-1}{n}v.$$

В самом деле, при таких стратегиях других игроков ожидаемый выигрыш игрока с оценкой $v$,

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}(v-p)\,p^{n-1},$$

достигает глобального максимума на $\mathbb{R}_+$ при $p = \frac{n-1}{n}v$, то есть условия первого порядка дали нам правильное решение. Заметим, что хотя мы нашли равновесие, но не можем быть уверены, что полученное нами решение единственно.

Если в аукционе участвуют 2 игрока, то в равновесии каждый предложит цену на уровне половины своей оценки. С ростом количества участников равновесные стратегии все больше приближаются к «правдивым» стратегиям $p_i(v) = v$.

Выше уже упоминалось, что равновесие в смешанных стратегиях в играх с полной информацией можно представить как байесовское равновесие (в чистых стратегиях) в играх с неполной информацией. Рассмотрим в качестве примера Игру 6 «Инспекция».

С помощью байесовского равновесия можно имитировать эффект смешанных стратегий при использовании только чистых стратегий. Рассмотрим, как это можно сделать на примере Игры 6 «Инспекция» (стр. 15). Предположим, что оба игрока могут быть разных типов. Для упрощения предположим, что множество типов у каждого из игроков — отрезок $[0, 1]$. При этом предполагаем, что разные типы одного и того же игрока имеют одинаковые предпочтения (те, что заданны Таблицей 8). Несложно проверить, что следующий набор стратегий является байесовским равновесием расширенной игры: налогоплательщик платит налог, если его тип удовлетворяет условию $\theta_1 \leqslant 1/2$, в противном случае он налог не платит; аналогично налоговый инспектор проверяет, если его тип удовлетворяет условию $\theta_2 \leqslant 1/2$. Это байесовское равновесие полностью воспроизводит равновесие в смешанных стратегиях исходной игры: в половине случаев налогоплательщик платит налог, и в половине случаев налоговый инспектор проверяет налогоплательщика. Рандомизирует при этом не игрок, а природа, когда выбирает тот или иной тип игрока.

Конечно, в расширенной игре существует не одно, а бесконечно много байесовских равновесий. Для получения другого байесовского равновесия требуется только произвольным образом разбить множество типов каждого игрока на две части, вероятности попадания в которые равны вероятностям использования чистых стратегий в исходном равновесии в смешанных стратегиях.

Можно также имитировать равновесие в смешанных стратегиях с помощью слегка измененной игры, в которой к выигрышам добавляются малые случайные возмущения, зависящие от типов игроков. Такой подход позволяет избавится от множественности байесовских равновесий, о котором только что говорилось. При этом равновесие в смешанных стратегиях будет пределом байесовских равновесий в «возмущенных» играх. (См. Задачу 3).

Таблица 20

| | | **Инспектор** | |
|---|---|---|---|
| | | проверять | Не проверять |
| **Проверяемый** | нарушать | $-1$; $1+\varepsilon_2$ | $1+\varepsilon_1$; $0$ |
| | не нарушать | $0$; $-1$ | $0$; $0$ |

***Задачи***

1. Как представить Игру 2 (стр. 7) в виде байесовской игры?

2. Богатство отца составляет $\$3$ с вероятностью $1/5$, $\$6$ с вероятностью $1/5{\cdot}4/5$, $\$12$ с вероятностью $1/5{\cdot}(4/5)^2$, и т.д. (то есть, $\$3{\times}2^k$ с вероятностью $1/5{\cdot}(4/5)^k$ для каждого $k \geqslant 0$). В один конверт он кладет две трети своего богатства, в другой — одну треть. Он дает по конверту каждому из двух сыновей (каждый из сыновей



с одинаковой вероятностью получит любой конверт). Каждый из сыновей видит, сколько денег в его собственном конверте, но не знает, сколько денег в конверте брата. Каждый из сыновей имеет функцию полезности от богатства $\ln(w)$. [ Подсказка: $3^9 > 2^{14}$].

(A) Рассмотрим следующую игру. Каждый из братьев решает, разделить ли деньги, находящиеся в конвертах. Таким образом каждый из братьев говорит «Да» или «Нет» (одновременно). Если оба говорят «Да», они делят деньги поровну. Если хотя бы один из братьев говорит «Нет», то они остаются с деньгами, находящимися в их собственных конвертах.

(i) Каждый брат знает только количество денег в его собственном конверте. Таким образом тип каждого брата — это элемент множества $\{1; 2; 4; 8; \ldots\}$. Каково распределение вероятностей по типам?

(ii) Опишите эту ситуацию формально как игру с неполной информацией.

(iii) Опишите равновесие (Байеса-Нэша) в чистых стратегиях, в котором братья делят деньги. Проверьте, что это действительно равновесие. Существует ли в этой игре другое равновесие?

(B) Предположите теперь, что отец объявил, что ни в одном из конвертов не может находиться больше чем $\$3{\times}2^K$ (для некоторого $K \geqslant 1$). Охарактеризуйте равновесия Байеса-Нэша в чистых стратегиях получившейся в результате игры.

3. В Таблице 20 показана «возмущенная» игра «Инспекция». В ней $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — случайные возмущения, соответствующие типу 1-го и 2-го игрока соответственно, причем $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ равномерно распределены на отрезке $[0, \delta]$ $(\delta > 0)$ и независимы между собой.[33] Найдите байесовское равновесие (в чистых стратегиях) в этой игре. Докажите, что при $\delta \to 0$ найденное байесовское равновесие стремится к равновесию в смешанных стратегиях исходной игры (Игра 6 на стр. 15).

[*Указание*: Подскажем, равновесие какого вида здесь искать. Каждый игрок выбирает некоторый пороговый уровень, $\bar{\varepsilon}_i$. Равновесные стратегии выглядят следующим образом: если $\varepsilon_1 < \bar{\varepsilon}_1$, то первый игрок выбирает стратегию «нарушать», а если $\varepsilon_1 > \bar{\varepsilon}_1$ — то

[33] Равномерное распределение выбрано нами только из соображений удобства. В данном случае подошло бы любое разумное непрерывное распределение.

стратегию «не нарушать» (вероятность того, что $\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_1$ равна нулю, поэтому этот случай можно не рассматривать); аналогичным образом второй игрок выбирает стратегию «проверять», если $\varepsilon_2 < \bar{\varepsilon}_2$ и стратегию «не проверять», если $\varepsilon_2 > \bar{\varepsilon}_2$.]

## *5. Динамические байесовские игры. Совершенное байесовское равновесие*

В этом параграфе мы рассмотрим разновидность игр, которые являются таким же обобщением статических байесовских игр, каким являются динамические игры с полной информацией для статических игр с полной информацией, т.е. динамические байесовские игры (динамические игры с неполной информацией).

В качестве примера динамической байесовской игры рассмотрим модификацию Игры 7 «Террорист» (стр. 23).

**Игра 13.** «*Террорист*»

Ситуация в данной игре такая же, как в Игре 7, однако террорист может быть двух типов: «нормальный» и «сумасшедший».

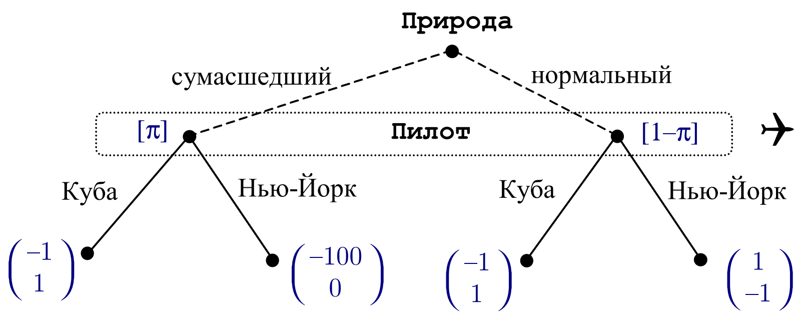


Рисунок 24.

Нормальный террорист так же, как и в Игре 7, получает выигрыш $-100$ в случае, если взорвет бомбу в Нью-Йорке. Сумасшедший же террорист получает в этом случае выигрыш $0$. Вероятность того, что террорист окажется сумасшедшим, равна $\pi$. Пилот не знает, с террористом какого типа он имеет дело, но сам террорист знает свой тип. ⇦

Игра схематически показана на Рисунке 28. В игру был добавлен дополнительный фиктивный игрок, природа.[34] Это сделано для того, чтобы показать на схеме случайный выбор типа террориста. Природа не имеет никакой целевой функции, поэтому на схеме показаны только выигрыши двух исходных игроков.

Первый ход делает природа. С вероятностью $\pi$ природа создает сумасшедшего террориста и с вероятностью $1-\pi$ — нормального. Пунктирной рамкой показано информационное множество пилота, соответствующее условию, что он не знает типа террориста.

Решение этой игры можно найти, применяя обратную индукцию. Сначала нужно рассмотреть поведение террористов обоих типов. Нормальный террорист, как мы видели раньше в Игре 7, не будет взрывать бомбу в Нью-Йорке. Сумасшедший же террорист, наоборот, предпочтет взорвать бомбу (так как $0$ больше $-1$). В результате этих рассуждений (которые, как предполагается, должен проводить рациональный пилот) получим свернутую игру, которая показана на Рисунке 24.

Если пилот выберет Кубу, то в любом случае поучит $-1$. Если же пилот выберет Нью-Йорк, то с вероятностью $\pi$ он получит $-100$, а с вероятностью $1-\pi$ получит $1$, то есть его ожидаемый выигрыш составит

$$\pi\cdot(-100) + (1-\pi)\cdot 1 = 1 - 101\pi.$$

Пилот должен сравнить выигрыш $-1$ с выигрышем $1-101\pi$ и выбрать максимальный. Таким образом, вид решения будет зависеть от параметра $\pi$. Если вероятность встретить сумасшедшего террориста мала, т.е. $\pi < 2/101$, то пилот полетит в Нью-Йорк, а если эта вероятность велика, т.е. $\pi > 2/101$, то он предпочтет полететь на Кубу. При $\pi = 2/101$ пилоту все равно, куда лететь.

Заметим, что в рассмотренном примере не содержится специфических элементов, которые придают динамическим байесовским играм принципиально иной характер по сравнению с динамическими играми с совершенной и полной информацией или статическими байесовскими играми. Поэтому здесь для нахождения решения нам достаточно было воспользоваться обратной индукцией. Мы смогли проанализировать выбор пилота, по-

[34] Отметим, что можно рассматривать байесовские игры (игры с неполной информацией) как игры с несовершенной информацией, в которых одним из игроков является *природа*.

скольку знали, с какой вероятностью он мог в своем информационном множестве оказаться в левой вершине, а с какой — в правой.

Однако зачастую такие вероятности неизвестны. Мы сталкивались уже с этой проблемой, рассматривая динамические игры с полной, но несовершенной информацией. В подобных ситуациях, коль скоро игрок стоит перед выбором в некотором информационном множестве, состоящем более чем из одной вершины, то ему приходится делать некоторые предположения относительно того, с какой вероятностью он может оказаться в той или иной вершине. Если игрок имеет такого рода ожидания, то на их основе он выбирает ту альтернативу, которая может обеспечить ему наибольший ожидаемый выигрыш. Эти рассуждения приводят к понятию **совершенного байесовского равновесия**.

Совершенное байесовское равновесие состоит из следующих компонент:

✦ набор стратегий $(s_1, \ldots, s_m)$ всех игроков;

✦ для каждого игрока $i$ — набор ожидаемых им стратегий остальных игроков, $\boldsymbol{s}^e_{-i}$;

✦ для каждого игрока в каждом информационном множестве, в котором ему принадлежит ход, — ожидаемое им распределение, заданное на вершинах этого информационного множества.

Для того, чтобы описанный набор стратегий и ожиданий составлял совершенное байесовское равновесие, необходимо выполнение следующих условий:

1) Ожидания любого игрока согласованы: ожидаемое распределение на вершинах информационных множеств для каждого игрока $i$ соответствует выбранной игроком стратегии $(s_i)$ и тем стратегиям, которые, как он ожидает, выберут другие игроки $(\boldsymbol{s}^e_{-i})$.

2) Выбранная стратегия последовательно оптимальна при данных ожиданиях, то есть выбор в каждом информационном множестве должен быть таким, чтобы максимизировать ожидаемый выигрыш в предположении, что после этого информационного множества игра будет идти в соответствии с набором стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}^e_{-i})$.

3) Ожидаемые стратегии совпадают с фактически выбранными стратегиями: $\boldsymbol{s}^e_{-i} = \boldsymbol{s}_{-i}$.

Первое условие требует специального пояснения. Поясним сначала это условие для случая чистых стратегий. Рассмотрим некоторого игрока $i$ и информационное множество, в котором



этому игроку принадлежит ход. Какими должны быть его ожидания в данном информационном множестве? Предположим, что траектория, соответствующая набору стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}^e_{-i})$ и выходящая из начальной вершины, проходит через одну из вершин данного информационного множества. В таком случае, если игрок рационален, то он должен ожидать, что будет находиться именно в этой вершине, коль скоро игра достигнет данного информационного множества и ему придется делать в нем выбор.

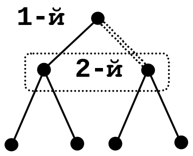

Рисунок 25

В качестве примера рассмотрим статическую игру, изображенную на Рис. 25. Если второй игрок ожидает, что первый игрок выберет правую стратегию, то он должен ожидать также, что будет находиться в правой вершине своего информационного множества. Следует отметить, что если второй игрок будет исходить из сформированных таким способом ожиданий, то, выбирая свои действия оптимальным образом, он повторит ту функцию отклика, которую мы рассматривали при анализе равновесия Нэша.

В случае смешанных стратегий общего вида рассуждения должны быть похожими. Следует вычислить, с какой вероятностью будет достигаться каждая из вершин некоторого информационного множества в процессе игры, если игра будет происходить в соответствии с набором стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}^e_{-i})$. Тогда ожидаемая вероятность того, что игрок может находиться в некоторой вершине рассматриваемого информационного множества, равна вероятности достижения этой вершины деленной на сумму вероятностей достижения вершин рассматриваемого информационного множества. Указанная сумма вероятностей есть просто вероятность достижения рассматриваемого информационного множества, если игра будет происходить в соответствии с набором стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}^e_{-i})$. Понятно, что эта вероятность не должна быть равна нулю, чтобы можно было произвести деление. (Если же вероятность равна нулю, т.е. данное информационное множество не может быть достигнуто, то указанное правило не применимо.) Описанный способ вычисления вероятностей соответствует классическому правилу Байеса для условных вероятностей.

Напомним, что правило Байеса применимо к событиям $A$ и $B_j$ $(j=1, \ldots, m)$, таким что:

(1) $B_j$ $(j=1, \ldots, m)$ — несовместные события, т.е.

$$B_j \cap B_k = \varnothing,\ \forall j, k = 1, \ldots, m;$$

(2) тот факт, что произошло одно из событий $B_j$ гарантирует, что произошло также событие $A$, т.е.

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_j.$$

При этом верна следующая формула Байеса:

$$P\{B_j \mid A\} = \frac{P\{B_j\}P\{A \mid B_j\}}{\sum_{k=1}^{m} P\{B_k\}P\{A \mid B_k\}} = \frac{P\{B_j\}P\{A \mid B_j\}}{P\{A\}}.$$

В этой формуле $P\{B_j\}$ — вероятность события $B_j$, $P\{B_j \mid A\}$ — вероятность события $B_j$ при условии, что произошло событие $A$, $P\{A\}$ — вероятность события $A$, $P\{A \mid B_j\}$ — вероятность события $A$ при условии, что произошло событие $B_j$. В знаменателе первой дроби стоит формула полной вероятности для $P\{A\}$. Чтобы можно было применить правило Байеса, нужно чтобы знаменатель не был равен нулю ($P\{A\} \neq 0$).

В применении к рассматриваемой проблеме можно считать, что событие $B_j$ означает, что процесс игры привел в определенную вершину, а событие — $A$, что процесс игры привел в данное информационное множество. Если брать только такие вершины, которые содержатся в рассматриваемом информационном множестве, то $P\{A \mid B_j\} = 1$ и формула упрощается:

$$P\{B_j \mid A\} = \frac{P\{B_j\}}{P\{A\}},$$

где $P\{A\} = \sum_{k=1}^{m} P\{B_k\}$.

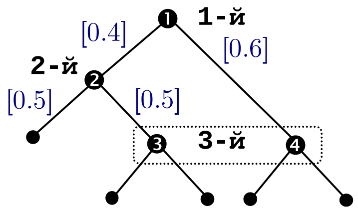

Рисунок 26

Поясним сказанное на примере игры, изображенной на Рис. 26. Если 3-й игрок считает, что 1-й игрок выбирает левую сторону с вероятностью $0.4$, и что 2-й игрок выбирает левую и правую сторону с равными вероятностями, то он должен считать, что вершина ❸ будет достигаться в процессе игры с вероятностью $0.4 \cdot 0.5 = 0.2$, а вершина ❹ — с вероятностью $0.6$. Таким образом, он должен сопоставить вершине ❸ вероятность

$$0.2/(0.2+0.6) = 0.25,$$

а вершине ❹ — вероятность

$$0.6/(0.2+0.6) = 0.75.$$

Это только одно из требований. Даже если при наборе стратегий $(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}^e)$ процесс игры никогда не может привести в некоторое информационное множество, ожидания игрока в данном информационном множестве должны соответствовать $(s_i, \boldsymbol{s}_{-i}^e)$. Так в игре изображенной на Рис. 27 (а), при указанных ожиданиях относительно стратегий 1-го и 2-го игроков 3-й игрок должен ожидать, что может оказаться в левой вершине с вероятностью $0.1$, а в правой вершине с вероятностью $0.9$, хотя вероятность достижения информационного множества равна нулю. Ограничимся только этими пояснениями и не станем давать более точного определения. Заметим, что не всегда можно по данному набору стратегий сформировать ожидания. Например, в игре изображенной на Рис. 27 (б), при указанных ожиданиях о стратегии 1-го игрока 2-й игрок не может сформировать ожиданий в своем информационном множестве. Второй игрок может получить ход только в результате ошибки первого игрока и трудно судить, какая из ошибок более вероятна. В таких случаях мы будем только требовать, чтобы у игрока были *некоторые* ожидания, и он выбирал стратегию на основе этих ожиданий.[35]

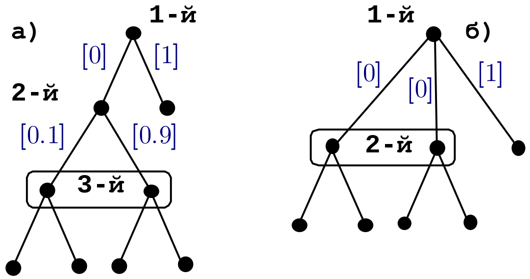

Рисунок 27

Отличительной особенностью совершенного байесовского равновесия является то, что для его поиска в общем случае невозможно использовать обратную индукцию, кроме случая игр с почти совершенной информацией. Если в игре нет подыгр, то совершенное байесовское равновесие приходится находить как решение системы уравнений: ожидаемые распределения на вершинах информационных множеств находятся в соответствии с равновесным набором стратегий, а равновесная стратегия выбирается каждым игроком на основе предположений об ожидаемых распределениях на вершинах информационных множеств.

[35] Для таких случаев в теории игр к настоящему времени разработано насколько различных концепций решений. Однако все они являются в той или иной степени спорными. Интересующийся читатель, владеющий английским языком, может обратиться к соответствующей литературе.

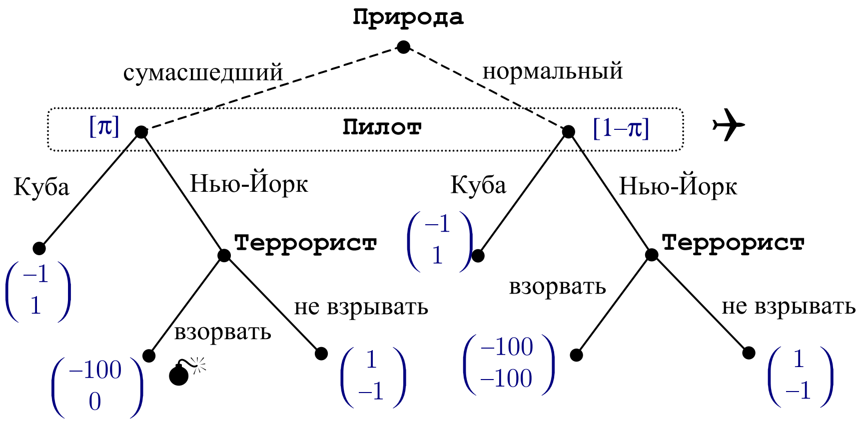


Рисунок 28. Игра «Террорист»

Для иллюстрации использования совершенного байесовского равновесия рассмотрим модификацию Игры 13 (стр. 42) с двумя типами террористов, в которой террорист предварительно решает, хочет ли он проводить операцию. Если он не станет осуществлять задуманную акцию, то вне зависимости от типа выигрыш террориста составит $0$, и выигрыш пилота составит $0$. Дерево игры показано на Рис. 29. Как и прежде, первый элемент вектора — выигрыш пилота. Поскольку выбор террориста в Нью-Йорке можно предсказать однозначно, то будем рассматривать «частично свернутую» игру. Совершенное байесовское равновесие должно состоять из следующих величин:

1) вероятность, с которой сумасшедший террорист проводит операцию, $\mu_1 \in [0, 1]$;

2) вероятность, с которой нормальный террорист проводит операцию, $\mu_2 \in [0, 1]$;

3) вероятность, с которой пилот ожидает встретить сумасшедшего террориста, $\alpha \in [0, 1]$;

4) вероятность, с которой пилот летит в Нью-Йорк, $\mu_3 \in [0, 1]$.

Этого достаточно для описания равновесия. Все остальные вероятности очевидным образом рассчитываются как функции указанных.

Рассмотрим сначала поведение пилота при ожиданиях, заданных параметром $\alpha$. Ожидаемые выигрыши пилота от двух возможных действий равны:



| | |
|---|---|
| Куба: | $-1$ |
| Нью-Йорк: | $\alpha\cdot(-100) + (1-\alpha)\cdot 1$ |

Таким образом, если $-1 < \alpha\cdot(-100) + (1-\alpha)\cdot 1$, т.е. $\alpha < 2/101$, то пилот предпочтет полететь в Нью-Йорк ($\mu_3 = 1$), если $\alpha > 2/101$, то на Кубу ($\mu_3 = 0$), а в случае, когда $\alpha = 2/101$, ему все равно, куда лететь ($\mu_3$ любое). Т.е. зависимость стратегии от ожидания имеет вид:

$$\mu_3(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha < 2/101, \\ [0, 1], & \text{если } \alpha = 2/101, \\ 0, & \text{если } \alpha > 2/101. \end{cases}$$

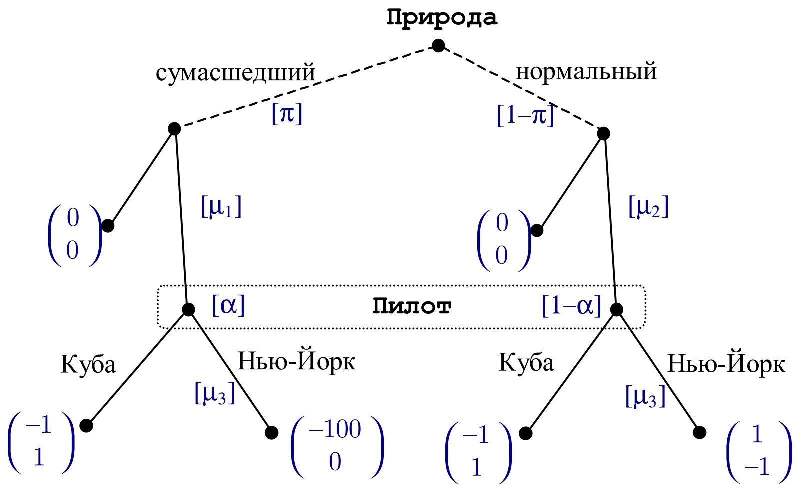


Рисунок 29.

Далее рассмотрим, какими должны быть ожидания пилота, $\alpha$, в зависимости от вероятностей $\mu_1$ и $\mu_2$. Если $\mu_1 \neq 0$ или $\mu_2 \neq 0$, то можно использовать формулу Байеса. В рассматриваемой игре можно считать, что события следующие: $B_1$ — террорист сумасшедший, $B_2$ — террорист нормальный, $A$ — в процессе игры пилот получил ход и должен выбирать, куда ему лететь. (Проверьте, что эти события удовлетворяют требованиям, необходимым для использования правила Байеса). При этом, используя введенные обозначения,

$$P\{B_1\} = \pi, \quad P\{B_2\} = 1 - \pi, \quad P\{B_1 \mid A\} = \alpha,$$

$P\{A \mid B_1\} = \mu_1, \quad P\{A \mid B_2\} = \mu_2.$

Получаем по формуле Байеса, что

$$\alpha(\mu_1, \mu_2) = \frac{\pi\,\mu_1}{\pi\,\mu_1 + (1-\pi)\,\mu_2}.$$

при $\mu_1 \neq 0$ или $\mu_2 \neq 0$. Если $\mu_1 = 0$ и $\mu_2 = 0$, то, согласно принятому нами определению байесовского равновесия, ожидания пилота $\alpha$ могут быть любыми: $\alpha(\mu_1, \mu_2) = [0, 1]$.

Рассмотрим теперь выбор каждого из типов террориста. Если террорист сумасшедший, то его ожидаемый выигрыш от задуманной акции при стратегии пилота, заданной вероятностью $\mu_3$, равен

$$(1-\mu_3)\cdot 1 + \mu_3\cdot 0 = 1 - \mu_3.$$

Он сравнивает этот выигрыш с $0$. Таким образом,

$$\mu_1(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1, \\ [0, 1], & \text{если } \mu_3 = 1. \end{cases}$$

Если террорист нормальный, то его ожидаемый выигрыш от задуманной акции равен $1 - 2\mu_3$. Он тоже сравнивает этот выигрыш с $0$, т.е.

$$\mu_2(\mu_3) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu_3 < 1/2, \\ [0, 1], & \text{если } \mu_3 = 1/2, \\ 0, & \text{если } \mu_3 > 1/2. \end{cases}$$

Набор вероятностей $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \alpha^*)$, задает совершенное байесовское равновесие, если выполнены четыре условия:

$$\mu_3^* \in \mu_3(\alpha^*), \qquad \alpha^* \in \alpha(\mu_1^*, \mu_2^*),$$
$$\mu_1^* \in \mu_1(\mu_3^*), \qquad \mu_2^* \in \mu_2(\mu_3^*).$$

Для того, чтобы найти решения этой системы, следует разобрать несколько случаев. По-видимому, проще всего проанализировать по отдельности следующие три возможности:

(1) нормальный террорист не проводит операцию ($\mu_2 = 0$);

(2) нормальный террорист проводит операцию ($\mu_2 = 1$);

(3) у нормального террориста невырожденная смешанная стратегия ($\mu_2 \in (0, 1)$).

(1) Рассмотрим случай, когда $\mu_2 = 0$. Предположим, что при этом $\mu_1 \neq 0$. Тогда пилот наверняка будет знать, что он может иметь дело только с сумасшедшим террористом ($\alpha = 1$). Зная это, пилот выберет Кубу ($\mu_3 = 0$). Но в таком случае нормальному террористу тоже выгодно проводить операцию. Мы пришли к противоречию. Значит, единственная возможность состоит в том, что сумасшедший террорист не проводит операцию ($\mu_1 = 0$). Но такое может быть только если он знает, что пилот полетит в Нью-Йорк ($\mu_3 = 1$). Однако, такое поведение пилота возможно только в том случае, если вероятность того, что он имеет дело с сумасшедшим террористом мала ($\alpha \leqslant 2/101$).

Мы нашли в рассматриваемой игре одно из равновесий (точнее, множество равновесий определенного вида):

$$\mu_3^* = 1, \qquad \alpha^* \in [0, 2/101],$$
$$\mu_1^* = 0, \qquad \mu_2^* = 0.$$

Это равновесие поддерживается уверенностью пилота, что вероятность встречи с сумасшедшим террористом мала. Заметим, что эти ожидания ни на чем не основаны, ведь в рассматриваемом равновесии пилот не может сформировать свои ожидания на основе правила Байеса.

(2) Рассмотрим теперь случай, когда $\mu_2 = 1$. Такое поведение нормального террориста возможно только, если пилот с достаточно большой вероятностью полетит на Кубу, а именно, если $\mu_3 \leqslant 1/2$. При такой стратегии пилота сумасшедшему террористу выгодно проводить операцию ($\mu_1 = 1$). Но если оба террориста проводят операцию, то для пилота вероятность встретить сумасшедшего террориста совпадает с вероятностью, с которой такие террористы встречаются вообще, т.е. $\alpha = \pi$. Пилот может выбрать $\mu_3 \leqslant 1/2$ только если $\alpha \geqslant 2/101$. Таким образом, равновесие может достигаться только при $\pi \geqslant 2/101$. При $\pi > 2/101$, имеем $\mu_3 = 0$. Таким образом, если сумасшедшие террористы встречаются на свете достаточно часто, т.е. если $\pi > 2/101$, то в рассматриваемой игре может иметь место следующее равновесие:

$$\mu_3^* = 0, \qquad \alpha^* = \pi,$$
$$\mu_1^* = 1, \qquad \mu_2^* = 1.$$

В вырожденном случае, когда $\pi = 2/101$, получаем, следующее множество равновесий:

$$\mu_1^* = 1, \qquad \mu_2^* = 1,$$
$$\mu_3^* \in [0, 1/2], \qquad \alpha^* = \pi = 2/101.$$

(3) И, наконец, рассмотрим случай, когда нормальный террорист использует невырожденную смешанную стратегию ($\mu_2 \in (0, 1)$). Условием использования такой стратегии является то, что обе альтернативы дают ему одинаковую полезность, то есть то, что пилот летит в Нью-Йорк с вероятностью $1/2$ ($\mu_3 = 1/2$). Такая стратегия пилота может поддерживаться только ожиданиями $\alpha = 2/101$. Учитывая, что сумасшедшему террористу выгодно участвовать в акции ($\mu_1 = 1$), из формулы Байеса получим следующее уравнение:

$$\alpha = \frac{2}{101} = \frac{\pi}{\pi + (1-\pi)\mu_2}.$$

Значит, пилот может сформировать такие ожидания только если

$$\mu_2 = \frac{99\pi}{2(1-\pi)}.$$

Поскольку вероятность $\mu_2$ должна быть меньше единицы, то вероятность, с которой природа порождает сумасшедших террористов должна быть достаточно мала: $\pi < 2/101$.

Таким образом, при $\pi < 2/101$ следующая точка является равновесием:

$$\mu_3^* = \frac{1}{2}, \qquad \alpha^* = \frac{2}{101},$$

$$\mu_1^* = 1, \qquad \mu_2^* = \frac{99\pi}{2(1-\pi)}.$$

Поскольку проанализированы все три возможных случая, то мы нашли все возможные равновесия игры.

### *Задачи*

1. Найдите совершенные байесовские равновесия в игре, изображенной на Рис. 19.

2. «Карточный блеф»

В начале игры игроки ($A$ и $B$) вносят по 1 д.е. После этого с равной вероятностью игрок $A$ получает одну из двух возможных карт, «старшую» или «младшую». Далее игрок может $A$ повысить ставку, добавив $2$ д.е. Если он этого не сделает, то игра заканчивается и деньги забирает игрок $B$. Если $A$ повышает, то делает ход игрок $B$. Он либо уравнивает, добавляя $2$ д.е., либо пасует. В первом случае карта открывается и деньги забирает игрок $A$, если карта старшая, и игрок $B$, если карта младшая. Во втором случае деньги забирает игрок $A$.

Покажите, что в этой игре нет совершенного байесовского равновесия в чистых стратегиях. Найдите равновесие в смешанных стратегиях. Как часто игрок $A$ будет блефовать, т.е. повышать, имея младшую карту? Как часто игрок $B$ будет уравнивать?



# 6. Игры и Парето-оптимальность

В этой главе мы приведем укажем на условия, гарантирующие Парето-оптимальность решений некоторых игр, рассматриваемых в книге.

Пусть задана игра с полной информацией в нормальной форме:

$$G = \langle I, \{X_i\}_I, \{u_i\}_I \rangle.$$

Напомним определение Парето-оптимальности.

**Определение 13.**

Исход $\boldsymbol{y} \in X$ **доминирует по Парето** исход $\boldsymbol{x} \in X$ (является **Парето-улучшением** по сравнению с $\boldsymbol{x}$) , если в нем каждый игрок получает выигрыш не меньше, чем в исходе $\boldsymbol{x}$, а хотя бы один из игроков получает выигрыш строго больше, чем в $\boldsymbol{x}$, т.е.

$$u_i(y_i) \geqslant u_i(x_i) \quad \forall\, i \in I,$$

и

$$\exists\, j \in I: \quad u_j(y_i) > u_j(x_i).$$

Исход $\hat{\boldsymbol{x}} \in X$ называется **Парето-оптимальным**, если не существует другого исхода $\tilde{\boldsymbol{x}} \in X$, такого что он доминирует $\hat{\boldsymbol{x}}$ по Парето.

Множество всех Парето-оптимальных точек называют **границей Парето**.

Рассмотренные выше решения (равновесия) не являются в общем случае Парето-оптимальными, что, в частности, показывает следующая игра.

**Игра 14.** *«Игра Ауманна»*[36]

Перед двумя участниками игры стоит следующий выбор. Каждый может потребовать, чтобы организатор игры дал сто долларов другому игроку, либо потребовать, чтобы он дал один доллар ему самому. Участники одновременно и независимо де-

[36] Эта игра представляет собой вариант известнейшей игры «Дилемма заключенных». Сюжет «Дилеммы заключенных» следующий. Двух человек арестовали по подозрению в совершении некоторого преступления. Судья предложил каждому следующую сделку. Если он сознается в преступлении, а другой нет, то сознавшийся получает 1 год наказания, а не сознавшийся — 10 лет. Если сознаются оба, то каждый получит по 7 лет. Заключенным также известно, что если никто из них не сознается, то оба получат по 3 года. (Цифры у разных авторов разные.)

лают выбор, после чего организатор игры исполняет их требования. ⇦

Игру можно представить с помощью следующей матрицы (см. Таблицу 21).

Таблица 21

| | | **Второй игрок** | |
|---|---|---|---|
| | | $100 другому | $1 ему |
| **Первый игрок** | $100 другому | 100<br>100 | 101<br>0 |
| | $1 ему | 0<br>101 | 1<br>1 |

В этой игре у каждого игрока существует строго доминирующая стратегия — потребовать 1 доллар себе. Соответствующий исход является и равновесием в доминирующих стратегиях, и равновесием Нэша. Примечательным является то, что этот исход является единственным не Парето-оптимальным исходом. Так, исход, в котором оба игрока требуют отдать сто долларов другому строго доминирует его по Парето.

## Сотрудничество в повторяющихся играх

Ситуации, аналогичные той, которая описана в игре Ауманна, являются примерами фиаско координации. Одно из объяснений этого фиаско состоит в том, что в игре Ауманна игроки только один раз должны сделать выбор. В ситуациях, когда игра повторяется и игроки, играя в игру, «помнят» всю все принятые ими ранее решения (предысторию игры), между ними вполне может возникнуть сотрудничество.

Чтобы проанализировать эту догадку формально, введем понятие **повторяющейся игры**. Под повторяющейся игрой понимают такую динамическую игру, которая является последовательным повторением некоторой исходной игры (неважно, статической или динамической). Чтобы получить дерево дважды повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине исходной игры «прикрепить» дерево исходной игры. Рис. 30 показывает как это сделать на примере игры Ауманна.

Аналогично, чтобы получить дерево $n$ раз повторяющейся игры, следует к каждой конечной вершине $n$–1 раз повторяющейся игры «прикрепить» дерево исходной игры. Конечно, для описания повторяющейся игры не обязательно задавать все дерево игры, достаточно указать исходную игру и сколько раз она повторяется. В отличие от обычных игр, в повторяющихся играх принято сопоставлять выигрыши не только конечным вершинам, но и тем промежуточным, которые соответствуют конечным вершинам исходной игры. Общий выигрыш рассчитывается суммированием выигрышей в вершинах, лежащих на траектории игры. Таким образом, если $u_{ij}$ — выигрыш, полученный $i$-м игроком в результате $j$-го повторения игры (на $j$-м «раунде»), то общий выигрыш в $n$ раз повторяющейся игре составит

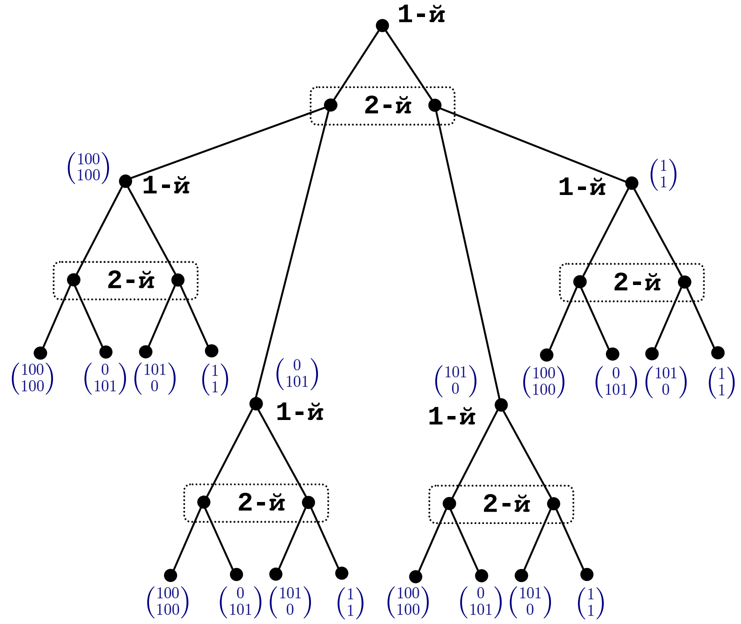


Рисунок 30. Дважды повторяющаяся игра Ауманна

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}.$$

Часто в повторяющихся играх выигрыши дисконтируют, что отражает тот факт, что игроки больше предпочитают получить выигрыш сейчас, а не в будущем. Другими словами, пусть $\delta_{ij} \in (0,\ 1)$ — дисконтирующий множитель $i$-го игрока для $j$-го раунда. Тогда общий выигрыш рассчитывается по формуле

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij})^{j-1} u_{ij}.$$

Будем считать в дальнейшем, что $\delta_{ij} = \delta_i$, т.е. дисконтирующий множитель не зависит от раунда.

Как нетрудно заметить, повторяющиеся игры являются разновидностью игр с почти совершенной информацией, поэтому совершенное в подыграх равновесие в них можно находить обратной индукцией.

Проанализируем повторяющуюся игру Ауманна. Используя обратную индукцию, рассмотрим последний раунд игры. Заметим, что все, что происходило в предыдущих раундах, влияет только на выигрыши, но не на множества стратегий. Однако влияние на выигрыши сводится только к тому, что ко всем выигрышам данного раунда добавляется одна и та же константа, определяемая предысторией игры. Таким образом, при анализе можно не принимать во внимание выигрыши предыдущих раундов. Тем самым, все сводится к анализу однократно повторенной игры Ауманна, равновесие которой нам известно: каждый игрок попросит 1 доллар себе.

Далее рассмотрим игры предпоследнего раунда, которые становятся играми последнего раунда в редуцированной игре. «Свертывание» последнего раунда добавляет к выигрышам предпоследнего раунда одну и ту же константу (в нашем случае это $1$ для обоих игроков). Предыстория игры тоже влияет только тем, что добавляет константу к выигрышам. Таким образом, опять с точностью до константы получаем исходную игру. Продолжая редуцировать игру, мы на всех раундах получим одно и то же решение, совпадающее с равновесием исходной игры. Таким образом, равновесная траектория будет представлять собой $n$ раз повторенное равновесие обычной игры Ауманна. Догадка о возникновении сотрудничества в повторяющейся игре в данном случае не подтверждается.

Можно сформулировать общую теорему для повторяющихся игр.

**Теорема 7.**
Пусть в игре $G$ с совершенной информацией (и конечным числом ходов) существует единственное совершенное в подыграх равновесие. Тогда в повторенной $n$ раз игре $G$, $G^n$,существует единственное совершенное в подыграх равновесие, причем равновесные стратегии в игре $G^n$ являются повторениями равновесных стратегий в игре $G$.



Мы не будем приводить формальное доказательство. Доказательство очевидным образом конструируется по схеме, которую мы применили, анализируя повторяющуюся игру Ауманна.

То, что гипотеза о возникновении сотрудничества не подтверждается может быть связано с тем, что игроки знают, что игра закончится на $n$-м ходу. И в самом деле, если бы игра Ауманна в повторялась бесконечное число раз, то сотрудничество между игроками могло бы иметь место.

Мы ранее не вводили в рассмотрение бесконечные игры, однако их основные элементы можно определить по аналогии с конечными играми. Выигрыш в **бесконечно повторяющейся игре** рассчитывается по формуле[37]

$$u_i = \sum_{j=1}^{\infty} (\delta_i)^{j-1} u_{ij}.$$

В отличие от игры с конечным числом повторений, в бесконечно повторяющейся игре Ауманна возможно возникновение сотрудничества. Рассмотрим стратегии следующего вида:

- Сотрудничать, если на предыдущих ходах другой игрок сотрудничал (в том числе, в первом раунде тоже сотрудничать).
- Не сотрудничать, если хотя бы на одном из предыдущих раундов другой игрок взял 1 доллар себе.

Такую стратегию называют **триггерной**.

Если дисконтирующие множители $\delta_1$, $\delta_2$ достаточно высоки, то такие стратегии будут составлять совершенное в подыграх равновесие.

Рассмотрим, при каких условиях игроку выгодно придерживаться триггерной стратегии, если его партнер также ее придерживается.

Поскольку после того, как игрок взял 1 доллар себе, его партнер во всей дальнейшей игре будет поступать таким же образом, то отказавшемуся от сотрудничества игроку будет выгодно брать 1 доллар себе во всей дальнейшей игре. Таким образом, если отказ от сотрудничества произойдет в $k$-м раунде, то игрок не может получить больше, чем

---

[37] Поскольку $\delta_i \in (0, 1)$, то при ограниченности выигрышей в исходной игре ряд сходится.

$$\sum_{j=1}^{k-1}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100 + (\delta_i)^{k-1}\cdot 101 + \sum_{j=k+1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 1.$$

Если же не один из игроков не будет отклонятся от триггерной стратегии, то их выигрыши составят

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100.$$

Таким образом, чтобы отклоняться было не выгодно, должно быть выполнено неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100 \geqslant \sum_{j=1}^{k-1}(\delta_i)^{j-1}\cdot 100 + (\delta_i)^{k-1}\cdot 101 + \sum_{j=k+1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 1$$

или

$$\sum_{j=k+1}^{\infty}(\delta_i)^{j-1}\cdot 99 \geqslant (\delta_i)^{k-1}\cdot 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{99\,\delta_i}{1-\delta_i} \geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad 99\,\delta_i \geqslant 1-\delta_i \quad\Leftrightarrow\quad \delta_i \geqslant \frac{1}{100}.$$

Таким образом, если дисконтирующие множители малы, то будущие выигрыши имеют малое значение для игроков и им будет выгодно отклонится от триггерных стратегий. Если же дисконтирующие множители достаточно велики, то триггерные стратегии будут составлять равновесие, в котором будет иметь место сотрудничество.

Следует отметить, однако, что рассмотренное равновесие будет не единственным совершенным в подыграх равновесием в бесконечно повторяющейся игре Ауманна. На самом деле в бесконечно повторяющихся играх практически всегда равновесий бесконечно много. В частности, стратегии в которых независимо от предыстории игроки всегда берут 1 доллар себе тоже составляют равновесие.

Существует теорема (в англоязычной литературе она известна под названием *Folk Theorem*, что на русский можно перевести как «Народная теорема»), утверждающая, что в бесконечно повторяющейся конечной статической игре с полной информацией любой «разумный» вектор выигрышей может возникнуть в некотором совершенном в подыграх равновесии, если дисконтирующие множители достаточно близки к единице. Под разумным вектором выигрышей мы понимаем такой вектор выигрышей, который является выпуклой комбинацией выигрышей исходной игры (с точностью до множителей $1-\delta_i$, необходимых для того, чтобы сделать выигрыши сопоставимыми), и кроме того, в нем каждый элемент должен быть не меньше некоторой пороговой величины. В разных вариантах теоремы пороговая величина разная: это либо выигрыш в каком-либо равновесии Нэша исходной игры, либо минимаксный выигрыш.[38]

Эту теорему можно интерпретировать как утверждение о том, что в бесконечно повторяющейся игре «почти все возможно». Кроме того, из теоремы можно сделать вывод, что в бесконечно повторяющейся игре совершенных в подыграх равновесий бывает, как правило, «слишком много». Понятно, что это снижает ценность полученного выше результата о возникновении сотрудничества в игре Ауманна.

## Игры торга

Теперь мы рассмотрим важный класс игр, моделирующих достижение соглашений между экономическими субъектами, — так называемые **игры торга**. В таких играх в условиях полной информации решения всегда Парето-оптимальны.

### Игра 15. *«Торг»*[39]

Два игрока ($A$ и $B$) делят между собой некоторую сумму денег (или любое бесконечно делимое благо). Будем считать, что общее количество равно $1$. Дележ можно задать долей, $x \in [0, 1]$, достающейся игроку $A$. Если игрок $A$ получает $x$, то игрок $B$, соответственно, получает $1-x$. Торг происходит в несколько раундов. На каждом раунде один из игроков предлагает дележ $x_j$, где $j$ — номер раунда. Другой игрок может либо отклонить, либо принять этот дележ. Если дележ принимается, то торг заканчивается и игроки получают свои доли $(x_j, 1-x_j)$. Если дележ отклоняется, то настает очередь другого игрока предложить свой дележ. Игрок $A$ предлагает дележ в раундах с нечетными номерами, а игрок $B$ — в раундах с четными номерами. Если за $n$ раундов игроки не договорятся, то игра заканчивается и каждый игрок получает $0$.

Предполагается, что игроки предпочитают получить деньги как можно раньше, поэтому полученная сумма денег умножается

---

[38] См. Friedman, J. (1971), "A Noncooperative Equilibrium for Supergames," *Review of Economic Studies*, **28**, 1-12. Fudenberg, D., and E. Maskin (1986), "The Folk Theorem for Repeated Games with Discounting and Incomplete Information," *Econometrica*, **54**, 533-54.

[39] Rubinstein, A. (1982), "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model," *Econometrica*, **50**, 97-109.

на дисконтирующий множитель, то есть если игроки договорятся на $j$–м раунде, то их выигрыши составят $\delta_A^{j-1}x_j$ и $\delta_B^{j-1}(1-x_j)$ соответственно, где $\delta_A, \delta_B \in (0, 1)$ — дисконтирующие множители. ⇦

Рассмотрим эту игру при $n = 3$. На Рис. 31 показано дерево игры.

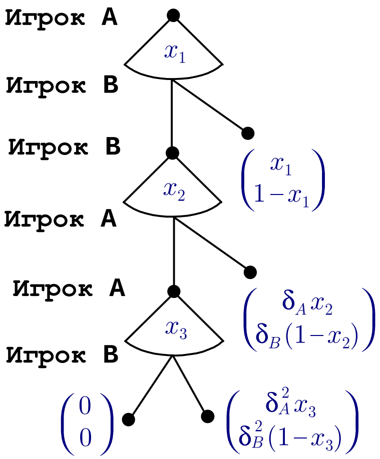

Рисунок 31

Проанализируем эту игру, используя обратную индукцию. В последнем раунде игрок $B$ заведомо примет предложение игрока $A$, если $\delta_B^2(1-x_3) > 0$, т.е. если $x_3 < 1$. Если $x_3 = 1$, то игроку $B$ все равно, принять или отклонить предложение. Игроку $A$ выгодно назвать $x_3$ как можно бо́льшим. Значит, в равновесной стратегии не может быть $x_3 < 1$, ведь игрок $A$ тогда мог бы немного увеличить $x_3$, не изменив выбора игрока $B$, и увеличил бы при этом свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_3 = 1$. Чтобы при этом действительно было равновесие, игрок $B$ должен в своей стратегии быть «благожелательным» по отношению к $A$, то есть принять его предложение; в противном случае игрок $A$ мог бы предложить $x_3$ меньше $1$ и увеличить при этом свой выигрыш.

Анализ 3-го раунда показывает, что игрок $A$ должен будет предложить $x_3 = 1$, а игрок $B$ должен будет принять этот дележ. Мы можем теперь «свернуть» игру, заменив 3-й раунд на конечный узел с выигрышами $\delta_A^2$ и $0$.

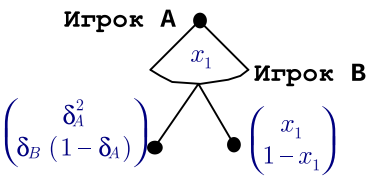

Рисунок 32

Во 2-м раунде игрок $A$ выбирает между $\delta_A^2$ (если отклоняет предложение) и $\delta_A x_2$ (если принимает). Таким образом, если $x_2 > \delta_A$, то он примет предложенный дележ, а если $x_2 < \delta_A$, то отклонит. При $x_2 = \delta_A$ игроку $A$ все равно, какой выбор сделать. Игрок $B$ предпочтет получить выигрыш $\delta_B$



$(1-x_2)$, а не $0$, поэтому он не станет предлагать $x_2 < \delta_A$. С другой стороны любой дележ $x_2 > \delta_A$ не является равновесным, поскольку игрок $B$ в этом случае может уменьшить $x_2$, не меняя выбора игрока $A$, и, тем самым, увеличить свой выигрыш. Таким образом, в равновесии $x_2 = \delta_A$. Чтобы этот выбор был равновесным, требуется, чтобы в равновесии игрок $A$ принял дележ $x_2 = \delta_A$, несмотря на то, что отказ от этого дележа должен принести ему такой же выигрыш.[40]

Остается торг, состоящий из одного раунда, в котором игроки получат $\delta_A^2$ и $\delta_B(1-\delta_A)$, если не придут к соглашению. Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что уже в первом раунде игроки придут к соглашению: игрок $B$ примет дележ $x_1 = 1 - \delta_B(1-\delta_A)$, предложенный игроком $A$. Выигрыши при этом составят $1-\delta_B(1-\delta_A)$ и $\delta_B(1-\delta_A)$.

О торге в условиях полной информации можно сделать два замечания:

1) *Торг заканчивается на первом раунде.*

2) *Равновесный исход Парето-оптимален.*

Рис. 33 показывает графический способ нахождения равновесия в игре «Торг» при $n = 3$. На этом графике видно, как изменяется граница Парето от раунда к раунду, сжимаясь в сторону начала координат из-за дисконтирования. Процесс нахождения решения изображен толстой кривой, выходящей из начала координат.

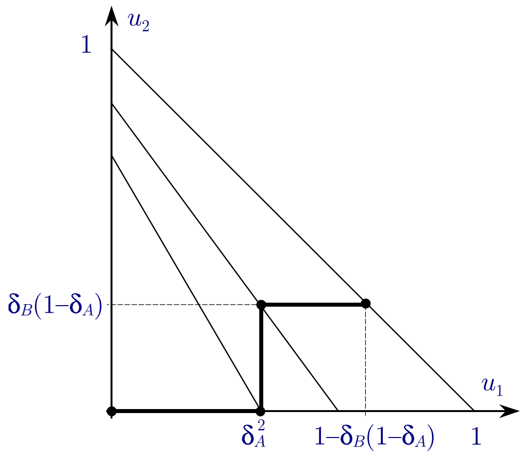

Рисунок 33

[40] Это довольно естественно, если взглянуть на ситуацию с той точки зрения, что игрок $B$ всегда может предложить игроку $A$ дележ $x_2 = \delta_A - \varepsilon$, где $\varepsilon$ — малое положительное число, тем самым гарантируя, что $A$ примет дележ. Число $\varepsilon$ здесь можно выбрать произвольно малым.

### *Задачи*

1. Постройте по своему имени и фамилии игру, как это описано в задаче 16 на стр. 21. Найдите в этой игре границу Парето. Есть ли среди равновесий Нэша Парето-оптимальные?

2. Объясните, почему в антагонистической игре (игре, в которой сумма выигрышей игроков — постоянная величина) любой исход является Парето-оптимальным.

3. Объясните, в чем состоит аналогия между аукционом, в котором игрок платит названную им цену, и игрой Ауманна (дилеммой заключенных). Представьте аукцион с двумя участниками как игру и сравните множество равновесий Нэша с границей Парето.

4. Рассчитайте общие выигрыши (в каждой из конечных вершин) в повторяющейся дважды игре Ауманна, изображенной на Рис. 30, считая, что дисконтирующие множители обоих игроков равны $1/2$.

5. При каких значениях дисконтирующих множителей пара стратегий следующего вида будет совершенным в подыграх равновесием в повторяющейся игре Ауманна: «В первом раунде сотрудничать. В остальных раундах поступать так же, как другой игрок в предыдущем раунде»?[41]

6. Найдите совершенное в подыграх равновесие в бесконечно продолжающемся торге. Решение может опираться на тот факт, что через каждые два раунда подыгра, начинающаяся с текущей вершины, повторяет исходную игру с точностью до дисконтирования. Таким образом, естественно искать стационарное равновесие. Найдите такое равновесие и покажите, что оно является совершенным в подыграх равновесием. Будет ли это равновесие оптимальным по Парето?

---

[41] По-английски эту стратегию называют *tit-for-tat*, что может означать как «око за око», так и «услуга за услугу».